EKSAMEN MAT2500, HØSTEN 2008 — LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

(a) Linjen har ligning på formen $ax+by+cz=0$ og må være tilfredsstilt av $(1,1,0)$ og $(0,1,1)$. Da må $a=-b=c$, så det duale punktet til linjen er $[1,-1,1]$.

(Alternativt er $[a,b,c]=[(1,1,0)\times(0,1,1)]$.)

Løser vi ligningene $x-y+z=2x-y+3z=0$, får vi skjæringspunktet $C=[2,1,-1]$. (C fremkommer også som $[(1,-1,1)\times(2,-1,3)]$.)

(b) A, B og C er distinkte punkter som alle ligger på linjen ℓ, så kryssforholdet (AB,CD) er definert når også $D\in\ell$.

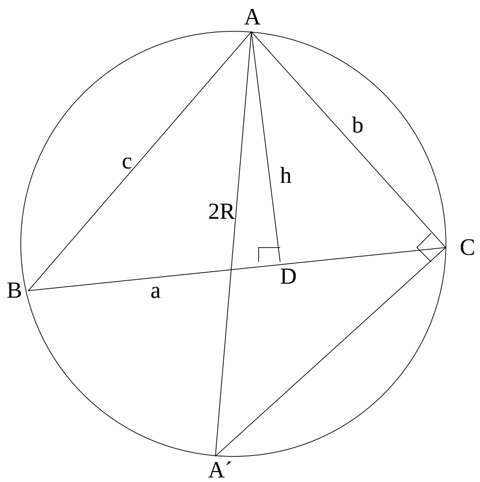
La $D=[x,y,z]$. Da er $(AB,CD)=qr/ps$, der $(2,1,-1)=p(1,1,0)+q(0,1,1)$ og $(x,y,z)=r(1,1,0)+s(0,1,1)$. Den første identiteten gir $p=2$ og $q=-1$, så vi får betingelsen $\dfrac{-r}{2s}=3$ på r og s. Derfor er $r=-6s$. Setter vi dette inn i uttrykket for (x,y,z) får vi

$$(x,y,z)=-6s(1,1,0)+s(0,1,1)=s(-6,-5,1)\,.$$

Punktet D i RP^2 er derfor $D=[-6,-5,1]$.

Oppgave 2

(a)



Se figuren til venstre. Vinkelen $\angle A'CA$ er rett siden den er periferivinkel over diameteren AA', og punktet D er definert slik at $\angle BDA$ er rett. Videre er $\angle DBA=\angle CA'A$ siden de begge er periferivinkler over samme bue. Siden vinkelsummen i trekantene er den samme, må de siste vinklene også være like, så trekantene er formlike.

(b) Siden trekantene er formlike, har vi $\dfrac{AB}{AA'}=\dfrac{AD}{AC}$, eller $\dfrac{c}{2R}=\dfrac{h}{b}$. Men det er det samme som $bc=2Rh$.

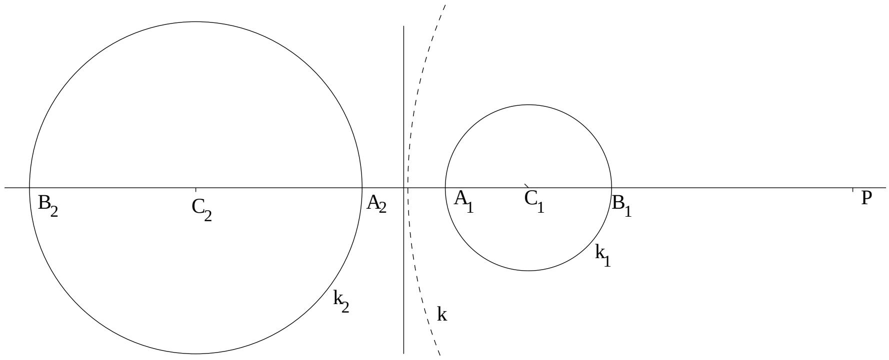
Multipliserer vi nå begge sider med a, får vi $abc=2Rha=4RF$, siden $F=\dfrac{ah}{2}$.

Oppgave 3

På figuren (neste side) er punktene $\{A_1=(1,0),B_1=(5,0)\}$ og $\{A_2=(-1,0),B_2=(-9,0)\}$ skjæringspunktene mellom henholdsvis k_1 og k_2 og X–aksen, og $\{C_1=(3,0),C_2=(-5,0)\}$ er sentrene i sirklene.

Vi vet at om vi inverterer k_1 i en sirkel k, så får vi en ny sirkel, og sentrene i de tre sirklene ligger på en linje. Hvis bildet av k_1 er k_2, må derfor sentrum P i k være et punkt $(p,0)$ på X–aksen. Da må inversjon i k bevare hele X–aksen, så det følger at punktmengden $\{A_1,B_1\}$ må avbildes på $\{A_2,B_2\}$. Derfor må alle disse punktene ligge på samme side av P på X–aksen. Men inversjonen S har den egenskapen at om A og B er to punkter slik at $|PA|<|PB|$, så er $|PS(A)|>|PS(B)|$. Den eneste muligheten er da at A_1 avbildes på A_2 og B_1 på B_2.

Hvis r er radien i k, gir dette ligningene $(p-1)(p+1) = r^2$ og $(p-5)(p+9) = r^2$, som har løsningene $p = 11$, $r = \sqrt{120}$.



Oppgave 4

(a) Vi tenker på A, B, C som vektorer i $\mathbb{R}^3$. Da er lengden c av siden AB gitt ved $\cos(c) = A \cdot B = 0$, så $c = \pi/2$.

På samme måte får vi $a = b = \arccos(1 \cdot (1/\sqrt{3})) = \arccos(1/\sqrt{3})$, der a er lengden av BC og b er lengden av AC.

(b) For å regne ut arealet trenger vi å kjenne vinklene $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ og $\gamma = \angle BCA$. Siden vi kjenner alle sidene, gjøres dette enklest ved å bruke den sfæriske cosinussetningen. F. eks. har vi

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{1/\sqrt{3} - (1\sqrt{3}) \cdot 0}{\sqrt{1 - (1/\sqrt{3})^2 \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

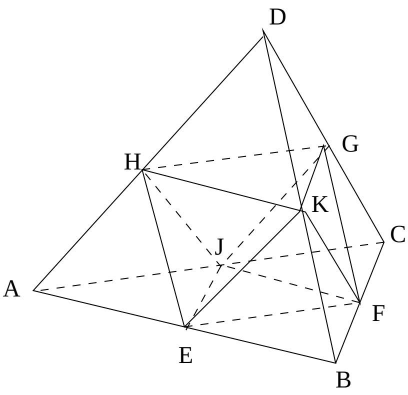
På samme måte er også $\cos\beta = \dfrac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ siden $a = b$, og

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{0 - (1\sqrt{3})(1\sqrt{3})}{\sqrt{1 - (1/\sqrt{3})^2}\sqrt{1 - (1/\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}\,.$$

Derfor er $\alpha = \beta = \pi/4$ og $\gamma = 2\pi/3$. Arealet blir da

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \pi/4 + \pi/4 + 2\pi/3 - \pi = \pi/6\,.$$

Oppgave 5



(a) På figuren er A, B, C, D hjørnene til T, og E, F, G, H, K, J er midtpunktene av de seks kantene, og altså hjørnene til S. At et polyeder er regulært, betyr at alle sideflatene er polygoner av samme type, og like mange slike polygoner møtes i hvert hjørne. Av figuren ser vi lett at dette er tilfelle for S: alle sideflatene er trekanter og i hvert hjørne møtes fire av dem — to som ligger i sideflater av T og to som ligger i plan som skjærer T midt mellom et hjørne og den motstående sideflaten.

S er et *oktaeder*. Dette er det eneste regulære polyederet som har seks hjørner.

(b) Enhver symmetri av T vil avbilde hjørner på hjørner og kanter på kanter, og siden den bevarer avstander, vil den også avbilde midtpunkter av kanter på midtpunkter av kanter. Derfor vil bildet av S være et polyeder med de samme hjørnene som S, og derfor lik S.

En symmetri av S som ikke fremkommer på denne måten er f. eks. refleksjon i planet gjennom E, F, G og H. Denne bytter om de siste hjørnene K og J, men ingen av hjørnene i T vil avbildes På punkter i T.

Andre eksempler er rotasjon $\pi/2$ om en symmetriakse for T, f. eks. aksen gjennom K og J.