Grafer og funksjoner

Fredrik Meyer

Sammendrag

Vi går raskt igjennom definisjonen på hva en funksjon er. Vi innfører også begrepet førstegradsfunksjon. Det forutsettes at du husker hva et koordinatsystem er.

1 Hva er en funksjon?

Vi begynner med å se på noen eksempler på funksjoner. Se figurene 1, 2, 3, og 4 nedenfor.

La oss se litt nærmere på figur 1. Om du vil vite hva en gjennomsnittlig familie betalte i motorvognavgift i for eksempel 1985, finner du året 1985 på *førsteaksen* (som vi også vil kalle *x-aksen*), og så leser du av hvor høyt streken ovenfor er plassert. Denne streken kaller vi *grafen* til funksjonen. Legg merke til at hvor hvert år, finnes en (og bare en) verdi på andreaksen (dette vil vi kalle *y-verdi*).

La oss se på figur nummer 2. Denne figuren skal modellere en telefonsamtale. Vi ser at når antall minutter er lik null, så er prisen på samtalen lik 1. Videre ser vi at etter ett minutt er prisen lik $1,50$. Igjen: til hver verdi på x-aksen, finner vi én og bare én verdi på y-aksen. (spørsmål: hva er minuttprisen?)

Vi sier at en strek er en graf om den "alltid går mot høyre" og ikke "snur". Disse er begge eksempler på funksjoner. Vi definerer en funksjon:

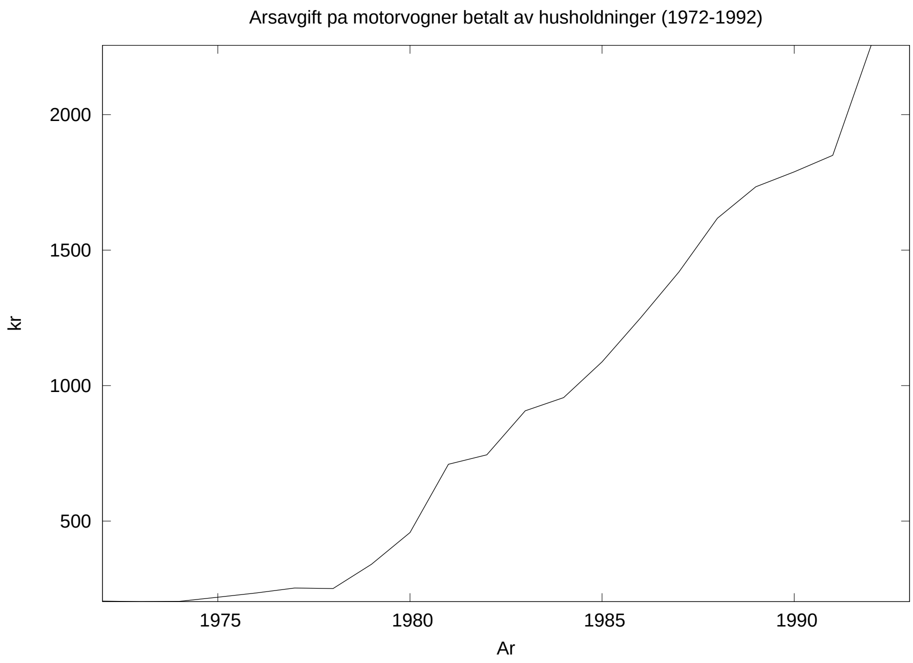
Definisjon 1. *En funksjon er en graf. Eller med andre ord: en funksjon er en regel for å tilegne hver x-verdi nøyaktig én y-verdi.*

Vi sier at y *er en funksjon av* x.

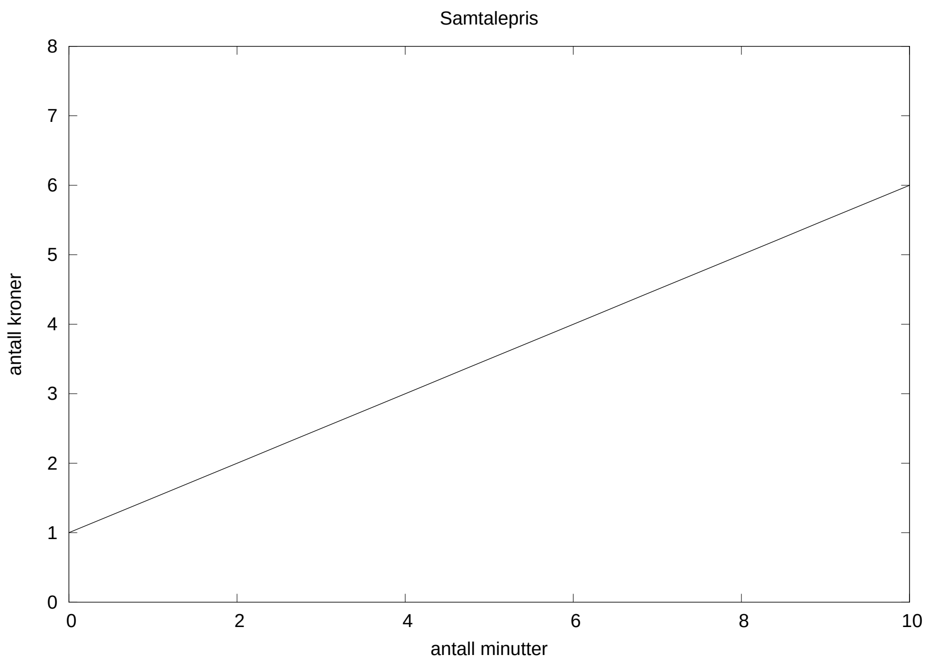
Men hva er det som *ikke* er en funksjon? Se på figur 3. Hvorfor er ikke dette en funskjon? Eller sagt med andre ord: hvorfor er ikke dette en graf? Om vi begynner på toppen av sirkelen, og følger streken, ser vi at den snur. Det betyr at den ikke er en graf. Eller med andre ord: velger vi oss en x-verdi, for eksempel $x = 0$, ser vi at vi får to y-verdier, nemlig $y = 1$ og $y = -1$. Men da kan ikke dette være en funksjon.

Vi må innføre et par nye ord. Se nå på figur 4 (hva en andregradsfunksjon er for noe, lærer dere snart!). Funksjonen har et bunnpunkt når $x = \frac{1}{2}$. Funksjonen har også to nullpunkter når $x = -2$ og $x = 3$. Dette betyr at når $x = -2$ så er den tilsvarende y-verdien lik null.

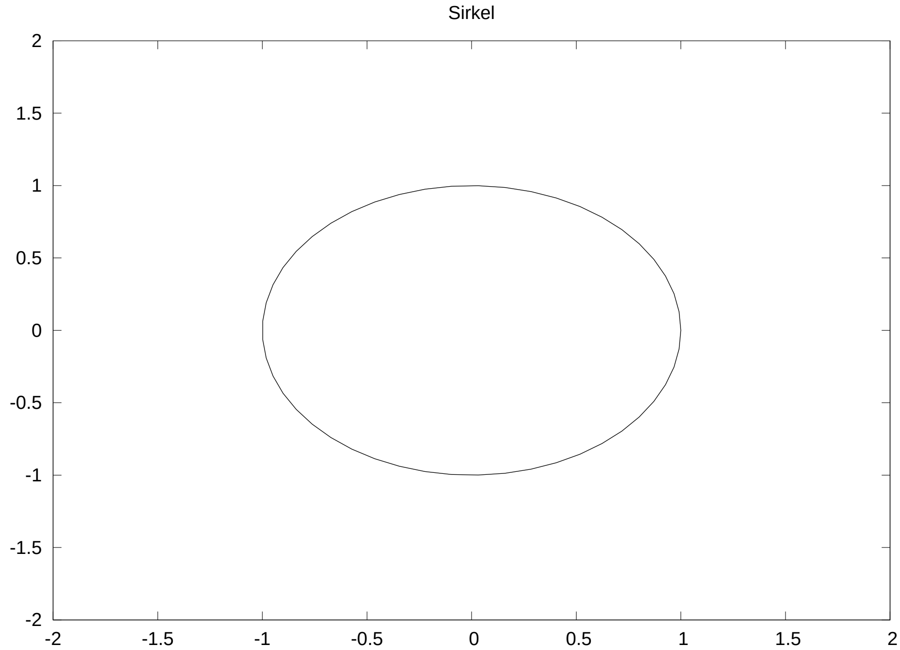
Definisjon 2. *Et* ***bunnpunkt*** *på en graf er et punkt som har lavere y-verdi enn alle andre punkter i nærheten på grafen. Et* ***toppunkt*** *på en graf er et punkt som har høyere y-verdi enn alle andre punkter i nærheten på grafen. Et* ***nullpunkt*** *på grafen er et punkt* (x, y) *med* $y = 0$.



Figur 1: Årsavgift på motorvogner betalt av husholdninger. Kilde: SSB.no.



Figur 2: Samtalepris gitt minutt.



Figur 3: Sirkel

Vi kan også beskrive funksjoner med formler. Se igjen på figur 2. Vi ønsker å finne en formel for funksjonen som gir oss prisen etter x minutter. Etter mye (?) prøving og feiling, finner vi at

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \tag{1}$$

passer med grafen. Hva betyr dette? Jo, la oss si vi ønsker å finne prisen etter 0 minutter. Da setter vi $x = 0$ i ligningen (1). Hva blir da y? Jo, da blir

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1.$$

På samme måte, etter ett minutt, er prisen oppe i

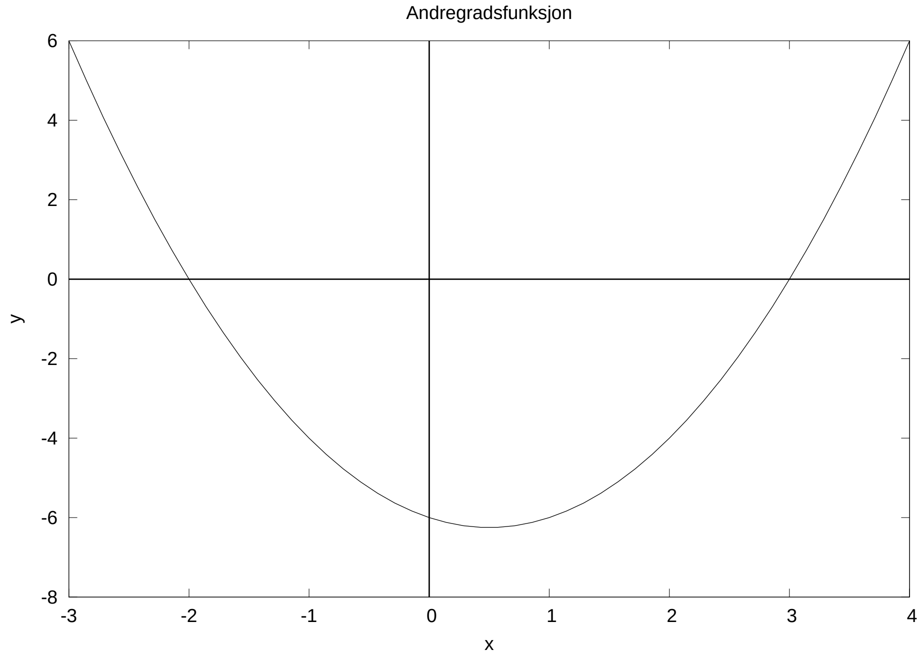
$$y = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = 1.5$$

Uttrykket $\frac{1}{2}x + 1$ kaller *funksjonsuttrykket* til funksjonen. Og hele (1) kalles *likningen for funksjonen.* Vi sier at y er uttrykk ved x.

2 Førstegradsfunksjoner

En spesielt enkel type funksjoner er førstegradsfunksjonene. De er på formen

$$y = ax + b.$$



Figur 4: En andregradsfunksjon.

Her er a og b er faste konstanter som ikke forandrer seg når x forandrer seg. Eksemplet med telefonprisen var en førstegradsfunksjon. Når funksjonen er en førstegradsfunksjon, er grafen en rett linje (derfor kaller vi også førstegradsfunksjoner for lineære funksjoner).

Tallet a kaller vi *førstegradsleddet* (også stigningstallet). Tallet b kaller vi *konstantladdet*.

Ønsker vi å tegne en førstegradsfunksjon, er det nok å finne to punkter på grafen (hvorfor?). La oss finne grafen til funksjonen $y = ax + b$ (lat som om a, b faktisk er tall, og ikke bare bokstaver). Det er nok å finne to punkter på grafen. For å finne første punkt velger vi $x = 0$ og får

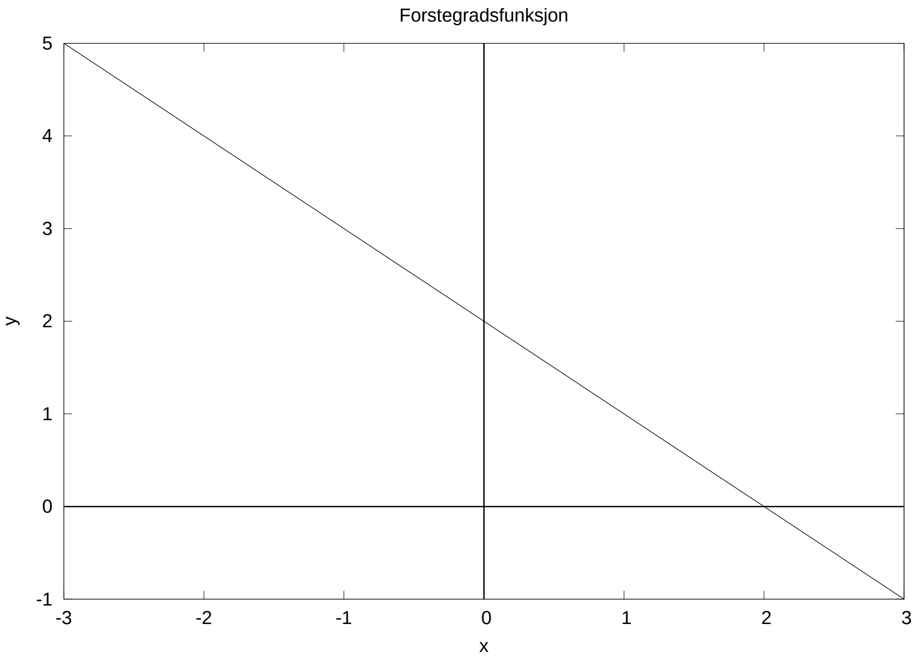
$$y = a \cdot 0 + b = b.$$

Så vi vi vet at $(0, b)$ ligger på grafen (legg merke til at dette punktet ligger på y-aksen!). For å finne neste punkt lar vi $x = 1$, og finner at

$$y = a \cdot 1 + b = a + b$$

Så punktet $(1, a + b)$ ligger på grafen. Om for eksempel $a = -1$ og $b = 2$ får vi figur 5. Legg merke til at punktet grafen krysser y-aksen i en høyde på $b = 2$. Legg også merke til at funksjonen har et nullpunkt for $x = 2$. (nesten alle førstegradsfunksjoner har ett nullpunkt. Hvorfor "nesten"?)

Til slutt kan vi innføre en ny skrivemåte for funksjoner. Til nå har vi skrevet en funksjon som $y =$ noe med x. Dette "noe med x", kan vi erstatte med forkortelsen $f(x)$. Lineære funksjoner er dermed funksjoner på formen $f(x) = ax + b$. Med denne skrivemåten ser vi at y-verdien når $x = 0$ mye enklere kan skrives som $f(0) = b$.



Figur 5: Eksempel på førstegradsfunksjon.