Økonomisk forum

Artikkel nr 9 - 02

HALVOR MEHLUM:

Når noe er for godt til å være sant. Er det da fortsatt godt?

Når noe er for godt til å være sant er det da fortsatt godt? Hvordan skal man forholde seg i situasjoner der man observerer noe som er særdeles usannsynlig? Skal man slå seg til ro med at man står overfor en unik begivenhet eller er det kanskje på tide å revurdere sine oppfatninger om hva som er sannsynlige begivenheter? I denne artikkelen drøfter jeg, med utgangspunkt i en konkret historie, dette spørsmålet. Jeg viser hvordan man ved en utvidelse av den enkleste versjon av Bayes formel kan behandle ganske komplekse situasjoner der et individ samtidig justerer flere av sine oppfatninger.

1. En skitur

I februar 1999 går jeg på ski i Nordmarka med mine venner Bendik og Vidar. Vi skal gå fra Mylla via Løvlia til Sognsvann. Når vi nærmer oss Spålen bestemmer Vidar seg for å ta turen om Ringkollen, for å få langet ut litt. Vi skal møtes igjen på Løvlia. Bendik og jeg kommer til Løvlia en time etter og lurer på om Vidar er kommet. Vi husker at Vidar hadde grå Swix staver med røde trinser (Jeg vil i det følgende kalle slike staver «spesialstaver»). Vi er nesten sikre på at det aldri er produsert en slik stavkombinasjon og at Vidar må ha tatt av de svarte standard trinsene og satt på røde trinser selv. Men, vi utelukker ikke fullstendig at det kanskje var slik at 1997 årgangen så akkurat slik ut og at dermed spesialstaver er vanlig. Når vi ankommer Løvlia står det 10 par grå Swix staver utenfor. Trinsene er stukket ned i nysnøen, så dem ser vi ikke. Når vi ser nærmere på det første paret staver ser vi at det har røde trinser og vår tro på at Vidar er på plass er styrket. Når vi ser nærmere på det andre paret så ser vi røde trinser også der. Problemet nå er om vi har grunn til å styrkes ytterligere i troen på at Vidar er på plass. Eller er det snarere på sin plass å revurdere premissen om at spesialstaver er sjeldne? Videre, dersom vi ender opp med å revurdere premissen om at spesialstaver er sjeldne, hvordan vil det virke tilbake på vår tro på at Vidar er på plass?

Halvor Mehlum er

Vi grubler litt over spørsmålet der og da, men blir avbrutt når Vidar kommer. Grunnen til at jeg deler dette problemet med Økonomisk forums lesere er at jeg tror eksempelet illustrerer et problem som også er relevant i økonomiske anvendeleser. Hvordan skal man for eksempel vurdere et tilbud om å gjøre en investering i Nigeria, som gir avkastning med en faktor på 1000 på et par uker? Er det et godt eller dårlig tilbud? Svaret er enkelt og Nigerianske myndigheter har betalt en kampanje i Financial Times med budskapet «If it sounds too good to be true, it is too good to be true» for å forhindre at noen faktisk biter på de lukrative tilbudene som strømmer ut fra Nigeria. Jeg vil senere i artikkelen se nærmere på et eksempel fra miljøøkonomien.

2. En løsning

Problemet fra skituren ble liggende i bakhodet og jeg tror jeg etter hvert har kommet frem til en løsning - en løsning som også kan brukes når man mottar tilbud fra Nigeria. Løsningen bygger på å bruke Bayes formel for oppdatering av *a priori* oppfatninger. Sannsynligheten jeg primært er opptatt av er sannsynligheten for at min venn Vidar er på plass ved Løvlia. Det er denne oppfatningen jeg ønsker å oppdatere, når jeg ser hvor mange spesialstaver det står utenfor. (Når jeg i det følgende referer til et antall mener jeg antall stavpar). Men, gitt at jeg ikke er helt sikker på at spesialstaver faktisk er en sjeldenhet må jeg også være åpen for å oppdatere denne oppfatningen. Merk at jeg bare er usikker på om spesialstaver er sjeldne eller vanlig. Jeg har derimot en klar oppfatning om hvilken hyppighet som gjelder når slike staver er sjeldne og hvilken hyppighet som gjelder når staven er vanlig. Det er totalt fire mulige tilstander T1) Vidar er på plass og spesialstaver er sjeldne T2) Vidar er ikke på plass og spesialstaver er sjeldne. T3) Vidar er på plass og spesialstaver er ikke sjeldne og T4) Vidar er ikke på plass og spesialstaver er ikke sjeldne. La min *a priori* oppfatning av sannsynligheten for at Vidar er på plass være *p0* og min tro på at spesialstaver faktisk er sjeldne være *q0*. Dersom spesialstaver er sjeldne er hyppigheten av slike staver s som er nær null. Dersom staven er vanlig er hyppigheten *v*, som er større enn *s*. De fire tilstandene kan systematiseres i følgende tabell.

Tabell 1. *A priori* sannsynligheter

	Vidar er på plass	Vidar er ikke på plass	SUM
spesialstaver er sjelden	T1, P(T1)=*p0***q0*	T2, P(T2)= (1-*p0*)**q0*	*q0* T2,
spesialstaver er ikke sjelden	T3, P(T3)= *p0**	T4, P(T4)= (1-*p0*)*(1-*q0*)	(1-*q0*)
SUM	*p0*	(1-*p0*)	1

De fire tilstandene har hver sin *a priori* sannsynlighet gitt av *p0* og *q0*. Ved å summere hver rad og kolonne gjenfinner jeg marginalsannsynlighetene. Jeg kan bruke Bayes formel til å oppdatere hver av de fire sannsynlighetene P(T1),...,P(T4). For å redusere kompleksiteten forutsetter jeg at det totale antallet staver er gitt lik *n*. Den eneste informasjonen jeg får, som jeg kan nyttiggjøre meg, er antallet spesialstaver *x*. Bayes formel for oppdatering av sannsynligheter gir meg

$$(1)\ P(\ Ti \mid x) = P(Ti)\ \frac{P(x \mid Ti)}{P\ (x)} \quad i = 1,2,3,4$$

der

$$P(\ x\ ) = P(\ x \mid T1)\ P(\ T1\ ) + P(\ x \mid T2)\ P(\ T2\ ) + P(\ x \mid T3)\ P(\ T3\ ) + P(\ x \mid T4)\ P(\ T4\ )$$

Gitt forutsetningene vil de betingete sannsynlighetene P(*x* | T*i*) være gitt ved binomialfordelingen, der *n* er totalt antall staver, *x* er antallet spesialstaver, mens hyppigheten er enten *s* eller *v*, som i følgende tabell

Tabell 2. Betingete sannsynligheter

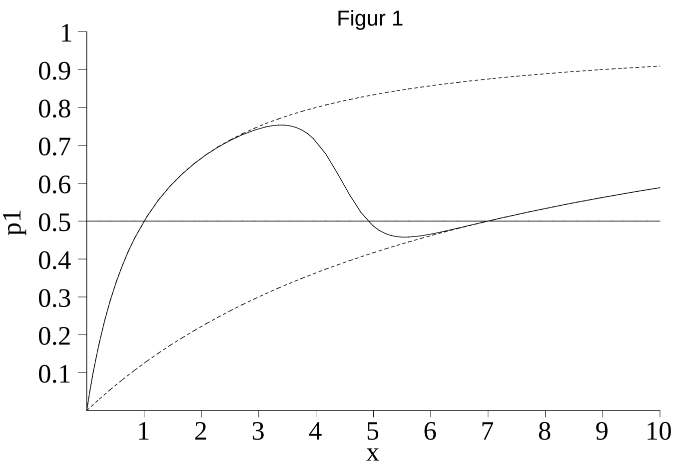
	Vidar er på plass	Vidar er ikke på plass
staven er sjelden	P(*x* | T1)=b(*x*-1;*n*-1,*s*)	P(*x* | T2)=b(*x*;*n*,*s*)
staven er ikke sjelden	P(*x* | T3)=b(*x*-1;*n*-1,*v*)	P(*x* | T4)=b(*x*;*n*,*v*)

I første rad er det gitt at spesialstaver opptrer med hyppighet *s*. I andre rad er det gitt at spesialstaver opptrer med hyppighet *v*. I første kolonne er det gitt at ett av parene med spesialstaver er Vidars. Sannsynligheten for utfallet *x* er da gitt ved sannsynligheten for å få *x*-1 spesialstaver på *n*-1 forsøk. I andre kolonne er det gitt at ingen av spesialstavene er Vidars. Sannsynligheten for utfallet *x* er da gitt ved sannsynligheten for å få *x* spesialstaver på *n* forsøk.
Ved å anvende formelen (1) får jeg oppdatert sannsynligheter for hver tilstand. I tillegg gir rad og kolonne-summene oppdaterte marginalsannsynligheter. Med andre ord finner jeg, ved å summere første linje og første kolonne, den oppdaterte troen på at Vidar er på plass, *p1*, og den oppdaterte troen på at spesialstaver er sjeldne *q1*.

Tabell 3 Oppdaterte sannsynligheter

	Vidar er på plass	Vidar er ikke på plass	SUM
spesialstaver er sjeldne	T1, P(T1|*x*)	T2, P(T2|*x*)	*q1*
spesialstaver er ikke sjeldne	T3, P(T3|*x*)	T4, P(T4|*x*)	(1-*q1*)
SUM	*p1*	(1-*p1*)	1

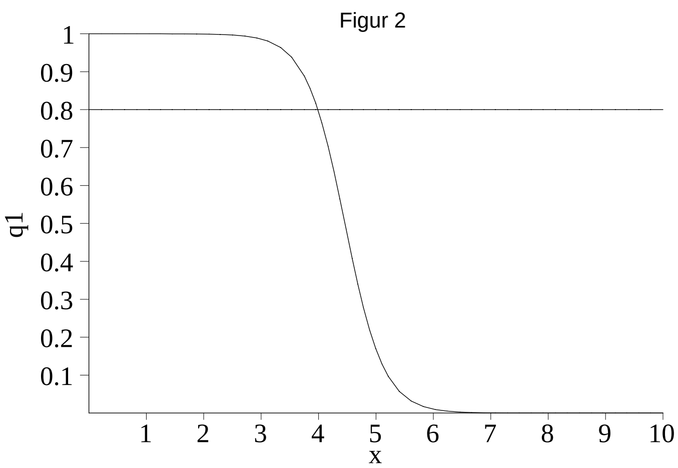
Jeg vil i de kommende illustrasjonene la min *a priori* tro på at Vidar er på plass være lik 50 prosent mens min *a priori* tro på at spesialstaver er sjeldne er 80 prosent. Videre opptrer en sjelden stav med hyppighet lik 10 prosent mens en vanlig stav opptrer med hyppighet lik 70 prosent. Endelig er det total antallet staver utenfor Løvlia lik 10. Altså: *p0*=0.5, *q0*=0.8, *s*=0.1, *v*=0.7 og *n*=10.



Figur 1 [Figur 1. Oppdatert tro på at Vidar er på plass.] illustrerer hvordan den oppdaterte troen på at Vidar er på plass, *p1*, avhenger av antallet spesialstaver *x*.

I figuren illustrerer den heltrukne linjen oppdatert tro, *p1*, som funksjon av *x*, mens den horisontale linjen ved 0.5 representerer *a priori* oppfatningen *p0*=0.5.Kurven for *p1* har flere interessante egenskaper. For det første er den ikke kontinuerlig stigende i *x*. Den har en krøll og har både et lokalt maksimum og et lokalt minimum. For det andre krysser den *a priori* oppfatningen tre ganger: Først rundt 1.0 så rundt 5.0 og til slutt rundt 7.0. La meg, før jeg ser nærmere på dette, se på de stiplede kurvene. Den øverste stiplede linjen viser oppdatert tro i det tilfellet der jeg er helt sikker på at spesialstaver er sjeldne , mens den nederste stiplede linjen viser oppdatert tro i det tilfellet der jeg helt sikker på at spesialstaver ikke er sjeldne. I begge disse tilfellene stiger naturlig nok min tro på at Vidar er på plass med antallet observerte spesialstaver. Når det er sikkert at spesialstaver er sjeldne skal det et lite antall spesialstaver til for at min tro på at Vidar er på plass overgår min *a priori* tro på 50 prosent. I eksempelet skjer dette for x=1. Mens når det er sikkert at spesialstaver er vanlig skal det mange spesialstaver til før min tro på at Vidar er på plass overgår min *a priori* tro. I eksempelet skjer dette for x=7.

Den heltrukne linjen, som gjelder i det tilfellet der jeg er i tvil om spesialstaver er sjeldne, beveger seg mellom disse to ytterposisjonene. Når x er veldig lav blir jeg praktisk talt sikker på at spesialstaver er sjeldne og den heltrukne kurven vil ligge nær den som gjelder ved full sikkerhet om sjeldenhet. Når x er høy blir jeg praktisk talt sikker på at spesialstaver er vanlige og den heltrukne kurven vil ligge nær den som gjelder ved full sikkerhet om vanlighet. Ettersom x beveger seg fra null til ti vil jeg først være sterk i min tro på T2. For litt høyere x vil jeg etter hvert få mer tro på T1, deretter på T4 og til slutt, for riktig høye x, vil jeg tro mest på T3. Når min tro beveger seg fra andre til første kolonne (fra T2 til T1 eller fra T4 til T3) styrkes min tro på at Vidar er på plass, mens når min tro beveger seg den andre veien (fra T1 til T4) svekkes min tro på at Vidar er på plass. Dette forklarer krøllen i forløpet til $p1$. Min tro på at spesialstaver er sjeldne, derimot, synker jevnt og trutt når x øker. For lave x har jeg mest tro på T1 eller T2, som begge impliserer sjeldenhet, mens for høye x har jeg mest tro på T3 eller T4, som begge impliserer vanlighet.



Figur 2 [Figur 2. Oppdatert tro på spesialstaver er sjeldne.] viser $q1$ som funksjon av x og illustrerer denne bevegelsen. Linjen ved 0.8 illustrerer *a priori* oppfatningen $q0$=0.8. Når x er lav blir jeg nesten sikker på at spesialstaver er sjeldne. Når x er lavere enn fire justerer jeg praktisk talt ikke *a priori* oppfatning om q. For x større enn fire går troen på at spesialstaver er sjeldne raskt mot null. Forløpet til $q1$ i Figur 2 er lite oppsiktsvekkende: Jo høyere observert hyppighet av spesialstaver desto lavere tro på at spesialstaver er sjeldne. Denne banale innsikten kan imidlertid brukes til å kaste ytterligere lys over, det ikke like opplagte, forløpet til $p1$ i Figur 1. Fra den elementære definisjonen av betingede sannsynligheter følger det at $p1$ kan dekomponeres på følgende måte

$p1$=P(Vidar på plass | x) =P(Vidar på plass | x og spesialstaver er sjeldne)*$q1$+ P(Vidar på plass | x og spesialstaver er ikke sjeldne)*(1-$q1$)

P(Vidar på plass | x og spesialstaver er sjeldne) er oppdatert tro i det tilfellet der jeg er helt sikker på at spesialstaver er sjeldne mens P(Vidar på plass | x og spesialstaver er ikke sjeldne) er oppdatert tro i det tilfellet der jeg er helt sikker på at spesialstaver ikke er sjeldne. Disse to utrykkene korresponderer altså til øverste og nederste stiplede linje i Figur 1. Min oppdaterte tro på at Vidar er på plass, $p1$, kan altså betraktes som et veid gjennomsnitt av disse to yterpunktene. Vektene $q1$ og (1-$q1$) er gitt i Figur 2. Ved denne betraktningen er den synkende segmentet $p1$ lett å forklare. Det skyldes at jeg når x blir større enn fire går jeg fra å være nesten sikker på at spesialstaver er sjeldne til å bli nesten sikker på at spesialstaver er vanlige. Dette har stor betydning for min vurdering av sannsynligheten for at Vidar er på plass. Eksempelet viser at Bayes formel kan være til hjelp også når jeg har en gnagende tvil om riktigheten av mine premisser og ikke bare tvil om hvilket utfall verden har servert meg. Resultatene over er kanskje paradoksalt, men de stemmer godt for den virkelige situasjonen der et overveldende antall spesialstaver gir grunn til å revurdere premissen om at de er sjeldne snarere enn å bli skråsikker på at min venn Vidar er på plass.

Eksempelet illustrerer også et dypere resultat om erkjennelse. Ved å sammenholde Figur 1 og Figur 2 ser vi at det for alle x er slik at den *a priori* oppfatningen blir korrigert i minst en dimensjon. For de tre verdiene av x der $p1=p0$ er $q1$ forskjellig fra $q0$ og for den x der $q1=q0$ er $p1$ forskjellig fra $p0$. Uansett hvilken x jeg observerer vil jeg altså lære, i den forstand at jeg vil korrigere minst én *a priori* oppfatning. Dette resultat har med frihetsgrader å gjøre. Oppfatningen *a priori* ($p0$,$q0$) er et punkt i planet mens ($p1$,$q1$) for forskjellige x avtegner en kurve i planet. Bare i helt spesielle tilfeller vil denne kurven passere akkurat over punktet ($p0$,$q0$). Litt løselig kan resultatet formuleres som følger: Dersom antallet dimensjoner jeg tviler i er større enn antallet dimensjoner jeg har data i, er det umulig ikke å lære.
Eller for å si det enda mindre teknisk:

3. Den som ønsker å lære mer trenger bare å slakke på noen fordommer.

Eksemplet over viser at det vi observerer virker tilbake på vår tolkning av det vi observerer. Min tro på at Vidar var på plass er bestemt av et veid gjennomsnitt der både det jeg veier sammen og vektene i seg selv varierer med det jeg ser. Det karakteristiske forløpet til $p1$ skyldes at vekten jeg bruker går fra én til null over et ganske kort intervall. Størrelsene jeg vekter sammen, derimot, stiger begge jevnt og trutt. Krøllen er altså et resultat av et vektingen endres snarere enn at funksjonene selv kaster på seg.
En forutsetning for at en slik krøll skal oppstå er at det er to distinkte alternativer som står opp mot hverandre og der disse to alternativene er tilstrekkelig forskjellige. (Enten er spesialstaver sjeldne, med hyppighet på 10 prosent, eller så er

de vanlige, med hyppighet på 70 prosent). Dersom det var et kontinuum av alternative grader av sjeldenhet ville overgangen mellom de forskjellige alternativene bli glattere og mer langstrakt og krøllen kunne fort forsvinne. Dersom det ikke var stor forskjel på de to alternativene ville de to stiplede kurvene ligge tett og overgangen mellom dem ville ikke gi et synkende segment.

4. En anvendelse

Økonomisk litteratur inneholder noen viktige bidrag som er beslektet med det jeg har diskutert over. Stiglitz og Weiss (1981) for eksempel viser at en bank, som får en kunde på døra, som er villig til å betale 50 prosent rente godt kan finne det fornuftig å avslå. Grunnen er at banken med god grunn vil misstenke kunden for å være en dårlig betaler. Renten er nemlig på samme tid et mål på gevinst i tilfellet der lånet betales tilbake og en kilde til informasjon om sannsynligheten for tilbakebetaling. Hos Stiglitz og Weiss knytter usikkerheten seg altså kun til sannsynligheten for tilbakebetaling. Oppdateringen av denne sannsynligheten brukes så til å risikokorrigere den tilbudte renten og slik blir risikokorrigert rente en funksjon av renten selv. Denne situasjon skiller seg altså fra tilfellet jeg har diskutert, der parameteren vi er interessert i er en sannsynlighet og der den Bayesianske oppdateringen foregår i to dimensjoner.
Et eksempel som er nærmere det jeg diskuterer vil være det følgende fra miljøøkonomi. Betrakt en bedrift som er anklaget for, ved uakseptabelt slendrian, å ha forurenset. Hva er sannsynligheten for overlagt slendrian? La bedriften ha valget mellom en akseptabel prosess, som gir lavt forventet utslipp og slendrian som gir høyt forventet utslipp. La det videre være noe variasjon rundt disse to forventningene. Store utslipp kan imidlertid også forekomme ved ekstraordinære omstendigheter når en ventil har en fabrikasjonsfeil. Anklageren har *a priori* oppfatninger både om sannsynligheten for slendrian og om sannsynligheten for ventilfeil, men anklageren kan ikke verifisere en ventilfeil etter et utslipp. Gitt disse forutsetningene kan følgende situasjon oppstå. Ved et lite utslipp kan man være sikre på at det verken har vært ventilfeil eller slendrian. Ved et litt større utslipp øker troen på slendrian. Ved enda større utslipp øker troen på en ventilfeil mens troen på slendrian synker. Ved riktig store utslipp må man konkludere med at bedriften både hadde ventilfeil og drev med slendrian. Den oppdaterte troen på slendrian vil først vokse i utslippets størrelse, deretter avta, for deretter igjen å vokse, akkurat som i eksempelet med skistavene.

I forurensingseksempelet vil regelen for oppdatering og et mulig ikke-monotont forløp kunne gi insentiver til strategisk adferd som ikke var noe problem i skistaveksempelet. Slik adferd vil komplisere bildet ytterlige og jeg nøyer meg med å skissere problemet. Det kan nemlig være slik at en bedrift, med slendrian i prosessen, ved å slippe ut litt ekstra vil kunne etterape en bedrift med akseptabel prosess, men med ventilfeil. Dersom anklageren er forberedt på slik strategisk adferd vil det imidlertid måtte virke tilbake på bevisvurderingene. Noe som igjen ville virke inn på den strategiske adferden, og så videre. En oversikt over slike informasjonsproblemer er gitt i Lewis (1996).

5. Avslutning

Jeg har i denne artikkelen ønsket å få frem fire aspekter. For det første at et redskap fra økonomenes verktøykasse - Bayesiansk oppdatering - kan brukes til å få et enhetlig tak på et problem der min intuisjon gikk i flere retninger (Flere spesialstaver betyr på samme tid øket tro på at Vidar er på plass og svekket tro på at de er sjeldne). For det andre at en slik enhetlig behandling av to motstridene effekter godt kan gi ikke-monoton sammenheng mellom observasjon og interesseparameter. For det tredje at en slik ikke-monoton sammenheng også kan oppstå i eksempler fra samfunnsøkonomien. Og til sist: Den som ønsker å lære mer trenger bare å slakke på noen fordommer.

Referanser:

Lewis, Tracy R. (1996) «Protecting the Environment When Costs and Benefits Are Privately Known» *Rand Journal of Economics*; Vol. 27, No. 4: 819-47

Stiglitz, Joseph E. and Andrew Weiss (1981) «Credit Rationing in Markets with Imperfect Information» *The American Economic Review*