

# Maxwells ligninger

Forelesningsnotater til Fysisk fagutvalgs *Felttur* høsten 2012.

Jørgen Eriksson Midtbø  
jorgeem@student.matnat.uio.no



# Innhold

<b>1</b>	<b>Introduksjon</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Gauss' lov</b>	<b>4</b>
2.1	Eksempel: Utledning av Coulombs lov fra Gauss' lov . . . . .	5
2.2	Eksempel: Elektrisk felt veldig nær en ladet overflate . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Magnetisme, Ampère-Maxwells lov</b>	<b>8</b>
3.1	Eksempel: Magnetfeltet fra en strømførende ledning . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Faradays induksjonslov</b>	<b>11</b>
4.1	Eksempel: Induksjonskomfyr . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Gauss' lov for magnetisme</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Elektromagnetiske bølger</b>	<b>17</b>
6.1	Løsninger av bølgeligningen . . . . .	19
6.2	Anvendelse: Polarisering . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Oppgaver</b>	<b>22</b>
7.1	Gauss' lov . . . . .	22
7.2	Ampère-Maxwells lov . . . . .	23
7.3	Faradays induksjonslov . . . . .	24
7.4	Elektromagnetiske bølger . . . . .	24

# 1 Introduksjon

Denne forelesningen tar for seg Maxwells ligninger, som med rette kan kalles grunnmuren i teorien for elektromagnetisme. Forelesningens ambisjon er å være en oppsummering av kjernestoffet i kurset, som i første rekke skal gi dere noen knagger å henge nylig og fremtidig kunnskap på, og lenger ut over høsten kunne virke som et referanseverk som binder pensum sammen. En drøy ambisjon, men i Fysisk fagutvalg sikter vi høyt...

La oss begynne med et overblikk. Ordet *elektromagnetisme* er en sammenstilling av *elektrisitet* og *magnetisme*, og elektromagnetisk teori dreier seg svært konsentrert om disse to fenomenene. Begge deler er kjent for de fleste gjennom dagligdagse opplevelser. Elektrisitet er selvsagt i en særstilling, med alt vi omgir oss med av strømkrevende dingser. Magnetisme er ofte forbundet i folks bevissthet med ting som kjøleskapsmagneter, men som vi skal se er magnetisme mye mer enn det – og elektrisitet og magnetisme er dessuten nært sammenknyttet i naturen.

Det som kalles *Maxwells ligninger* er fire ligninger som til sammen danner grunnlaget for elektromagnetismen. De er oppkalt etter den skotske fysikeren *James Clerk Maxwell (1831-1879)*, som oppdaget sammenhengene mellom ligningene og brakte det hele frem til en konsistent teori. Flere av de faktiske ligningene ble oppdaget av, og er oppkalt etter, andre fysikere. Her er alle de fire Maxwell-ligningene listet opp:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{Gauss' lov} \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{Ampère-Maxwells lov} \qquad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{Faradays induksjonslov} \qquad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{Gauss' lov for magnetisme} \qquad (4)$$

Disse ligningene er vektorligninger. Det er fordi elektromagnetismen er en *feltteori* – det vil si at den fundamentale bestanddelen i teorien er *felter* som man tenker seg ligger utbredt i hele universet. Siden både elektriske og magnetiske krefter har en *retning* (elektriske ladninger kan frastøte eller tilrekke hverandre, en magnet har en sydpol og en nordpol) så må deres tilsvarende felter være vektorfelter. Feltene er ikke like sterke overalt i naturen, derfor må de matematisk sett være en funksjon av posisjonen. De ser altså slik ut, formelt sett:

$$\mathbf{E} = E_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + E_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + E_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}, \qquad (5)$$

$$\mathbf{B} = B_x(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + B_y(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + B_z(x, y, z)\hat{\mathbf{k}}. \qquad (6)$$

Den formen Maxwell-ligningene er gitt på over, med  $\nabla$ -operatorer, kalles ofte for *differensiell* form. Fysikere er glade i å oppgi ligningene på denne måten, fordi de blir veldig kompakte. Det er imidlertid mulig å skrive om alle ligningene til *integralform*, og det på er den formen de vanligvis blir brukt. Av frykt for å gi leseren ligningssjokk skal jeg ikke liste opp alle fire på integralform her, men de kommer i løpet av teksten.

## 2 Gauss' lov

Den første Maxwell-ligningen er Gauss' lov, som altså ser slik ut:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7)$$

Denne likningen leses som “divergensen av det elektriske feltet er lik ladningstetthet delt på epsilon null”. Divergensen til en vektor er summen av de partielt deriverte av hver komponent i sin retning:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (8)$$

Ladningstetthet,  $\rho$ , er helt analogt til massetetthet, og defineres som ladning  $Q$  per volum  $V$ . “Epsilon null” er en naturkonstant,  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{F/m}$ , som kalles *elektrisk permittivitet i vakuum*.

Likningen relaterer altså en romlig endring i elektrisk felt til tettheten av ladninger. Det gjør oss ikke nødvendigvis noe klokere. For å få grep om hva det egentlig betyr, skriver vi om ligningen:

Ved å bruke en annen av herr Gauss' oppdagelser, nemlig *divergensteoremet* (også kalt Gauss' teorem), kan vi skrive om ligningen på en form som er mer anvendelig, men som ikke “ser like vakker ut”.

Divergensteoremet sier at dersom vi har et lukket, romlig volum  $V$ , så vil integralet over divergensen av et vektorfelt i volumet være lik integralet av vektorfeltets fluks gjennom omslutningsflaten  $\partial V = A$ . Matematisk:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \iint_{A=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Divergensteoremet} \quad (9)$$

(Størrelsen  $d\mathbf{A}$  spiller to roller: Den er en vektor som peker rett ut fra flaten  $A$  i alle punkter, og vektorens lengde er  $dA$ , et infinitesimalt flatelement. Hvis du ikke liker notasjonen så kan du godt skrive den som  $(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{u}}_A) dA$ , der  $\hat{\mathbf{u}}_A$  er en enhetsvektor ut av flaten.)

Gauss' lov sier at divergensen til  $\mathbf{E}$  er ladningstetthet per epsilon null, så vi setter inn det på venstre side i divergensteoremet:

$$\iiint_V \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = \iint_{A=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad (10)$$

$\epsilon_0$  er en konstant og kan tas utenfor, og integralet av en ladningstetthet over et volum gir total ladning innenfor volumet:

$$\iint_{A=\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{Gauss' lov på integralform} \quad (11)$$

På denne formen er loven lettere å tolke. Tenk deg at du har en ladning  $Q$  inne i en svart boks. Du vet ikke så mye om den, men du har et måleapparat som kan måle elektrisk feltstyrke. Gauss' lov sier at hvis du måler den elektriske feltstyrken i alle punkter rundt på boksen, og summerer det opp, så vet du hvor stor ladningen  $Q$  er. Det har ikke noe å si hvordan ladningen er fordelt inne i boksen (om alt ligger i nedre venstre hjørne, eller om det er tilfeldig strødd rundt).

På denne formen er loven også veldig anvendelig. Det første beviset på det er følgende eksempel:

## 2.1 Eksempel: Utledning av Coulombs lov fra Gauss' lov

For de som har hatt fysikk på videregående kan *Coulombs lov* virke mer fundamental enn Gauss' lov – vi lærte tross alt den mye tidligere enn vi lærte Gauss' lov. Men husk at vi nå tenker oss at alt vi vet om elektromagnetisme kommer fra de fire Maxwell-ligningene. Da er vi nødt til å bevise alt annet, slik som for eksempel Coulomb. Og det ville jo vært en dårlig teori dersom vi ikke engang klarte den.

Coulombs lov sier som kjent at feltet fra en elektrisk punktladning med ladning  $Q$  er

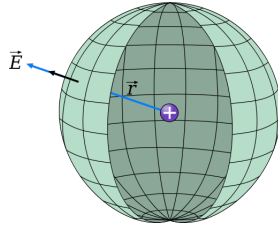
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (12)$$

(Her er  $\hat{\mathbf{u}}_r$  en radiell enhetsvektor, og  $r = |\mathbf{r}|$ .)

Vår jobb er å bevise denne formelen fra Gauss' lov. Så nå skal vi glemme formel (12), og bare anta at vi har en punktladning i origo og at Gauss' lov gjelder. For å håndtere problemet skal vi bruke en tenkemåte som er veldig vanlig når man jobber med Maxwells ligninger. Vi tenker oss at vi legger en usynlig kule rundt punktladningen vår, og at kulen har radius  $r$ . Kulen definerer da et volum  $V$  som inneholder ladningen  $Q$ . Straks sier Gauss' lov oss at

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Husk at nå er det  $\mathbf{E}$  vi vil finne –  $Q$  kjenner vi! Så vi må på en eller annen måte håndtere det problemet at  $\mathbf{E}$  står inne i et integral. La oss studere innmaten i integralet:  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ . Siden  $d\mathbf{A}$  peker rett ut av flaten, vil skalarproduktet plukke ut lengden av den delen av  $\mathbf{E}$  som peker rett ut. Men vi har definert flaten som en kule omkring punktladningen, så ved å betrakte



Figur 1: En tenkt kule rundt en punktladning.

symmetrien i problemet finner vi ut at  $\mathbf{E}$  selv faktisk må peke rett ut av flaten i alle punkter.<sup>1</sup> Et tilsvarende symmetriargument viser at  $\mathbf{E}$  har samme størrelse på hele kuleskallet – den avhenger bare av kulas radius. Siden vi behandler kulas radius som konstant, betyr det at vi faktisk kan flytte  $\mathbf{E}$  utenfor integralet – men da må vi huske å ta vekk vektortegnet, siden vi har gjennomført et skalarprodukt. Vi sitter da igjen med et enkelt flateintegral for arealet til en kule:

$$\iint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E \iint_{\partial V} dA = E 4\pi r^2.$$

Totalt får vi altså

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

eller

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

Ved tidligere nevnte symmetriargument peker feltet rett ut, så vi kan sette på vektortegn dersom vi legger til en radiell enhetsvektor på høyre side:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r. \quad (13)$$

som er Coulombs lov.

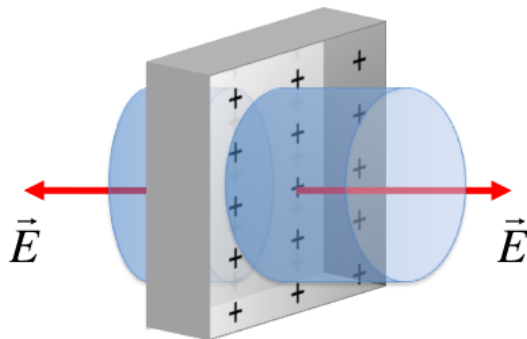
<sup>1</sup>Syns du symmetriargumentet var tynt? La oss tenke litt nærmere på det. Hvis  $\mathbf{E}$  ikke peker rett ut av flaten overalt, så må det være steder langs kulen der  $\mathbf{E}$  har en komponent tangentielt på kulen. Men en kule er helt rund. Så det er ingenting ved kulen som gjør det mulig å identifisere en retning som mer riktig enn en annen (for eksempel mer “opp” enn en annen), for å ha en tangentiell komponent. Dermed blir tangentielle komponenter av  $\mathbf{E}$ -feltet faktisk en absurd tanke.

## 2.2 Eksempel: Elektrisk felt veldig nær en ladet overflate

I mange sammenhenger ser vi på elektriske felter fra ladete overflater som er veldig store i forhold til den avstanden fra flaten vi er interessert i å se på. Det er for eksempel relevant når vi skal studere *kondensatorer*, to ladete plater som sitter tett inntil hverandre, men med litt plass i mellom. Da kan vi gjøre en tilnærming som er veldig vanlig i fysikk, nemlig å betrakte flaten som uendelig stor. Vi tenker oss også at platen er mye tynnere enn den er bred, slik at vi kan betrakte den som uendelig tynn (“to-dimensjonal”). Målet er å finne et uttrykk for det elektriske feltet i denne tilnærmingen.

Som i eksempelet over skal vi bruke et tenkt geometrisk objekt, men denne gangen velger vi en sylinder i stedet for en kule. (Disse objektene kalles forresten ofte for *Gauss-bokser* som en samlebetegnelse). La oss si at overflaten vi ser på har ladningstetthet  $\sigma$ . (Det vil nå si ladning per *areal*, siden det er mer praktisk i dette problemet.) Vi tenker oss videre at sylinderen står rett ned i flaten, med toppen utenfor flaten på oversiden og bunnen utenfor på nedsiden. Sylinderens vegger står normalt på flaten. Sylinderens topp og bunn har areal  $A$ . Den ladningen som ligger innenfor flaten er  $Q = \sigma A$ . Vi setter opp Gauss’ lov, og velger å dele opp sylinderens overflate i tre deler: Bunnflate, toppflate og vegg. Vi får da

$$\iint_{\text{topp}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{\text{bunn}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{\text{vegg}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (14)$$



Figur 2: En tenkt sylinder gjennom en ladet flate.

Det første vi gjør er å kvitte oss med integralet langs veggen: Flatevektoren  $d\mathbf{A}$  for veggen peker overalt rett ut parallelt med platen. Jeg påstår at det elektriske feltet peker rett ut av platen overalt, slik at  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$  for hele veggen. Det kommer av at platen er antatt å være uendelig stor, slik at alle feltkomponenter langs flaten må kansellere hverandre.<sup>2</sup> Det neste vi gjør er å observere at siden endeflatene er parallelle med platen så må det elektriske feltet være konstant over endeflatene. Videre, siden flatevektoren  $d\mathbf{A}$  er definert til å peke *ut* av flaten overalt, så må  $d\mathbf{A}_{\text{bunn}} = -d\mathbf{A}_{\text{topp}}$ . Det samme gjelder fortegnet på de elektriske feltene:

<sup>2</sup>Se først for deg en ladet sirkelskive med endelig radius. Overbevis deg selv om at feltet rett over midten av sirkelskiven må peke rett ut. Tenk deg så at du lar radius i sirkelen gå mot uendelig – det må fremdeles gjelde. Overbevis til slutt deg selv om at *alle* punktene på en uendelig stor flate kan betraktes som sentrum i en uendelig stor sirkel. :)

$\mathbf{E}_{\text{bunn}} = -\mathbf{E}_{\text{topp}}$ . Totalt gir det selvfølgelig at  $\mathbf{E}_{\text{topp}} \cdot d\mathbf{A}_{\text{topp}} = \mathbf{E}_{\text{bunn}} \cdot d\mathbf{A}_{\text{bunn}}$ . La oss kalle  $\mathbf{E}_{\text{topp}} = -\mathbf{E}_{\text{bunn}} = \mathbf{E}$ . Vi får da

$$\iint_{\text{topp}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \iint_{\text{bunn}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2E \iint_{\text{topp}} dA = 2E A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Til slutt rydder vi opp og får

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

eller med vektortegn ( $\hat{\mathbf{u}}_n$  er en normalvektor ut av flaten):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}_n \quad (15)$$

Så det elektriske feltet fra en uendelig stor – eller svært nær en endelig – ladet overflate er *uavhengig av avstanden til flaten!*

### 3 Magnetisme, Ampère-Maxwells lov

Gauss' lov, som vi nettopp har studert, er den eneste av Maxwell-ligningene som ikke inneholder  $\mathbf{B}$ , magnetfeltet. *Gauss' lov for magnetisme* er en ren magnetismeligning, mens *Faradays induksjonslov* og *Ampère-Maxwells lov* begge relaterer *tidsforandringer i den ene typen felt til romlige forandringer i den andre typen*. Det siste er en noe luftig formulering, men vi skal se hva det betyr. La oss begynne med å se på Ampères-Maxwells lov. Likningen er slik:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (16)$$

Det første vi skal gjøre er å *droppe det andre leddet på høyre side*. Det virker utrolig umotivert, men for våre formål i denne seksjonen har vi faktisk ikke bruk for det (det kommer til å være null uansett), og det letter beregningene betraktelig. Vær imidlertid obs. på at det generelt skal være med, og loven er ikke generelt korrekt uten. I vår forenkling har vi da følgende ligning (som forresten heter *Ampères lov*, så da gjetter du kanskje hva Maxwell bidro med?):

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (17)$$

La oss kikke på symbolene som inngår.  $\mathbf{B}$  er altså magnetfeltet, et vektorfelt på samme måte som det elektriske feltet.  $\mu_0$  er en naturkonstant for magnetfelt som kalles *magnetisk permeabilitet*, analogt til den elektriske permittiviteten  $\epsilon_0$ .



Vektoren  $\mathbf{J}$  kalles *strømtetthet*. Vi har ikke snakket om strøm hittil, men det er forhåpentligvis kjent at strøm er *elektriske ladninger i bevegelse*. Strøm skrives  $I$ , og måles i ampère. Strømtettheten  $\mathbf{J}$  måler strøm  $I$  per areal. Hvis vi for eksempel har en sirkulær strømlledning med radius  $R$  meter der det går en strøm på  $I$  ampère, så er strømtettheten  $J = I/(\pi R^2)$  ampère per meter. Grunnen til vektorsymbolet  $\mathbf{J}$  er at strømmen har en retning i rommet. Vi ser at Ampères lov relaterer magnetisme til strøm, altså ladninger i bevegelse!

Også denne ligningen er mer håndterlig på intergralform. Vi trenger en analog til Gauss sitt divergensteorem, men her er det *virvlingen* (curl, på engelsk) av et vektorfelt det er snakk om. Da gjelder *Stokes' teorem*, som sier følgende: Fluksintegralet av virvlingen til et vektorfelt over en flate  $A$  er lik det lukkede kurveintegralet av vektorfeltet omkring flatens rand  $C = \partial A$ . Her er det virkelig nødvendig å få det skrevet opp med symboler:

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{Stokes' teorem} \quad (18)$$

Personlig synes jeg teoremet er litt lite håndgripelig, fordi virvling er et lite håndgripelig konsept. Men kvalitativt så er virvlingen av et vektorfelt et mål på feltets tendens til å "rottere", og den samme tendensen kan fanges opp ved å integrere tangentiellkomponenten av feltet rundt en lukket kurve. Hvis du synes dette var rare greier så er det egentlig ikke så viktig i denne sammenhengen, vi skal bare bruke det bittelitt:

Vi tar utgangspunkt i differensialformen av Ampères lov (ligning (17)). Så velger vi en vilkårlig, sammenhengende flate  $A$ , og tar fluksintegralet over denne flaten av begge sider i ligningen:

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_A \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Stokes' teorem sier at vi kan bytte ut venstresiden med et kurveintegral:

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

Som nevnt er  $\mathbf{J}$  strøm per areal, så fluksintegralet av  $\mathbf{J}$  over et areal er ikke noe annet enn total strøm gjennom flaten!

$$\iint_A \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_A$$

der  $I_A$  spesifiserer total strøm gjennom flaten  $A$ . Nå har vi fått også Ampères lov på integralform:

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_A \quad \text{Ampères lov på integralform} \quad (19)$$

Det er fint og flott, men la oss bruke den til å regne ut noe! Siden loven relaterer magnetiske felter til strøm, så foreslår jeg å regne ut det magnetiske feltet rundt en strømførende ledning.

### 3.1 Eksempel: Magnetfeltet fra en strømførende ledning

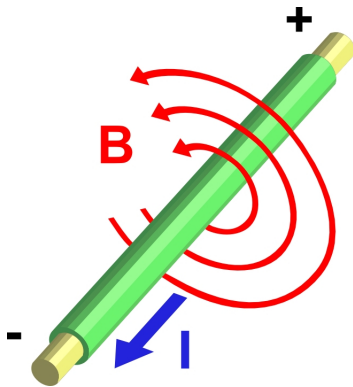
Vi går rett løs på oppgaven, vi, og tenker oss en uendelig lang, rett ledning (“uendelig lang” er det samme som at vi jobber nært ledningen, ikke sant?), hvor det går en strøm  $I$ . Vi vil finne magnetfeltet som denne strømmen gir opphav til.

La oss lage en tenkt flate, på samme måte som vi gjorde for Gauss’ lov. Denne gangen velger vi en sirkelskive, som er plassert slik at ledningen går gjennom midten av sirkelskiven og står normalt på den. La sirkelskiven ha radius  $r$ , slik at den får areal  $A = \pi r^2$ . Da kan vi sette opp Ampères lov for sirkelskiven:

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_A = \mu_0 I$$

der vi har brukt at den totale strømmen som går gjennom sirkelskiven er  $I$ .

Det gjenstår å bli kvitt integraltegnet på venstresiden. Og nå er jeg redd at vi må jukse litt, som Ingrid Espelid Hovig ville sagt. For å håndtere problemet er vi nemlig nødt til å anta at *magnetfeltet rundt en rett leder danner sirkler omkring lederen*. Det er helt sant, og kan bevises med andre metoder.<sup>3</sup> Mer spesifikt vil magnetfeltets retning følge høyrehåndsregelen, med strømmens retning langs tommelen og magnetfeltet rettet etter fingertuppene.



Figur 3: Magnetfeltet rundt en strømløder danner sirkler etter høyrehåndsregelen.

<sup>3</sup>Et bevis gis i seksjon 5.

Men OK: Siden magnetfeltet danner sirkler omkring lederen, så kan magnetfeltets styrke kun avhenge av  $r$ .<sup>4</sup> Videre, siden vektoren  $d\mathbf{r}$  er tangentvektoren til sirkelskiven, så er  $\mathbf{B}$  parallell med  $d\mathbf{r}$ . Mer formelt så kan vi skrive  $d\mathbf{r} = r d\hat{\theta}$ , der  $d\hat{\theta}$  er den *tangentielle enhetsvektoren i polarkoordinater*. Dermed får vi  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = Br d\theta$ . Så husker vi på at vi har fiksért  $r$  – vi ser på en spesifisert sirkelskive. Dermed kan vi faktisk sette både  $B$  og  $r$  utenfor integralet! Integralet rundt den lukkede kurven blir bare integralet av  $d\theta$  fra 0 til  $2\pi$ :

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = Br \int_0^{2\pi} d\theta$$

Det integralet klarer vi, og resultatet er ingen overraskelse: Vi får  $B$  ganger omkretsen til sirkelskiven.

$$Br \int_0^{2\pi} d\theta = B 2\pi r$$

Dermed blir likningen vår

$$B 2\pi r = \mu_0 I$$

Eller hvis vi flytter litt rundt:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Magnetfeltet danner sirkler, og er således rettet tangentielt til sirkelen i alle punkter. Derfor, hvis  $\hat{\mathbf{u}}_T$  er en *tangentvektor* til sirkelen, rettet slik at systemet oppfyller høyrehåndsregelen, så kan vi skrive

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_T \qquad \text{Magnetfelt fra en strømleder} \qquad (20)$$

## 4 Faradays induksjonslov

Vi har nå sett på to av de fire Maxwell-ligningene. Den første, Gauss' lov, omhandler divergens av elektrisk felt. Nummer to, Ampères lov, beskriver virvling av magnetisk felt. Det er faktisk en symmetri i dette, og de to siste ligningene tar for seg *virvling av elektrisk felt og divergens av magnetfelt*. Vi tar først virvling av elektrisk felt, også kjent som Faradays induksjonslov.

Loven ser slik ut:

---

<sup>4</sup>Dette kunne man forsåvidt argumentert ut fra symmetri også.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (21)$$

For å få den over til integralform bruker vi igjen Stokes' teorem. Vi velger en vilkårlig, sammenhengende flate  $A$ , og tar fluksintegralet over denne flaten av begge sider i ligningen:

$$\iint_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} = \iint_A \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

Ved Stokes' teorem bytter vi ut venstresiden:

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_A \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

På høyresiden kan vi flytte derivasjon med hensyn på tiden, samt minustegnet, utenfor integralet:

$$\iint_A \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Fluksintegralet av magnetfeltet  $\mathbf{B}$  over en flate  $A$  kaller vi for *magnetisk fluks*, og den skrives  $\Phi_{B,A}$ , der  $B$  spesifiserer magnetisme og  $A$  spesifiserer flaten. Faradays induksjonslov på integralform blir dermed

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial \Phi_{B,A}}{\partial t} \quad \text{Faradays induksjonslov på integralform} \quad (22)$$

#### 4.1 Eksempel: Induksjonskomfyr

Vi skal bruke Faradays lov til å forklare hvordan en induksjonskomfyr, også kalt induksjonstopp, virker. En induksjonstopp, som blir mer og mer vanlig på norske kjøkken, er en komfyr som ikke benytter direkte varmeoverføring for å varme opp en kjele. I stedet brukes magnetisme til å lage en strøm i bunnen av kjelen, som gjør at kjelen blir varm.

Induksjonstoppen er bygd opp slik: På en keramisk plate er det tegnet opp en sirkel som markerer hvor kjelen skal stå. Rett under denne sirkelen ligger det en elektrisk ledning som er kveilet mange ganger i sirkler, som en spiral. En slik ledning kalles en *spole*. Kjelen man bruker har en tykk bunn av metall, så det er god plass til at det kan gå strøm i den. Når man skrur på komfyren så sendes det *vekselstrøm* gjennom spolen – det vil si at strømmen bytter retning fram og tilbake. På grunn av denne strømmen vil spolen lage et magnetfelt. Magnetfeltet trenger inn i bunnen av kjelen og gir opphav til en strøm inne i kjelen. På grunn

av metallens *elektriske motstand* inne i kjelen vill noe av denne strømmen gå med til varme, og dermed blir kjelen varm.

La oss nå prøve å sette opp dette litt mer matematisk. Vi begynner med å se på spolen. La oss si at den har  $N$  vindinger, det vil si at ledningen ligger som  $N$  sirkler oppå hverandre. La oss videre si at høyden til alle disse  $N$  sirklene oppå hverandre er  $L$ . (Det blir altså høyden til spolen.)

Først gjør vi noen kvalitative betraktninger: Vi ser for oss bidraget til magnetfeltet fra to diametralt motsatte punkter på den sirkulære ledningen. Fra forrige eksempel vet vi at magnetfeltet rundt disse leder-bitene danner sirkler. Ved å bruke høyrehåndsregelen finner vi at de to bidragene vil peke i samme retning inne i spolen, og i motsatte retninger av hverandre utenfor spolen. Videre vet vi at magnetfeltstyrken er proporsjonal med  $1/r$  i en avstand  $r$  fra lederen, så hvis ikke spolen er veldig stor er de to motsatte komponentene omtrent like kraftige. Inne i spolen vil de to bidragene balansere hverandre, sånn at det ene øker i styrke når det andre minker (når vi beveger oss ut mot kanten). Så til en god tilnærming kan vi si at *magnetfeltet utenfor "veggen" til en spole er null, og magnetfeltet inne i spolen er konstant.*

Basert på dette kan vi finne magnetfeltstyrken. Vi tenker oss at vi legger en firkantet kurve slik som på figur 4. Så setter vi opp Ampères lov:

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_A$$

Vi kan dele opp integralet over kurven i fire, langs hver av de fire sidene på kurven. Bidraget fra linjestykket  $c-d$  blir null fordi magnetfeltet er null. Bidragene fra  $b-c$  og  $a-d$  blir også null, fordi  $d\mathbf{r}$  står normalt på  $\mathbf{B}$ . Så vi får faktisk bare et bidrag fra linjestykket  $a-b$ . Her er  $d\mathbf{r}$  og  $\mathbf{B}$  parallelle, så vi får  $B$  utenfor, og integralet av  $dr$  over linjestykket blir bare lengden av linjestykket:

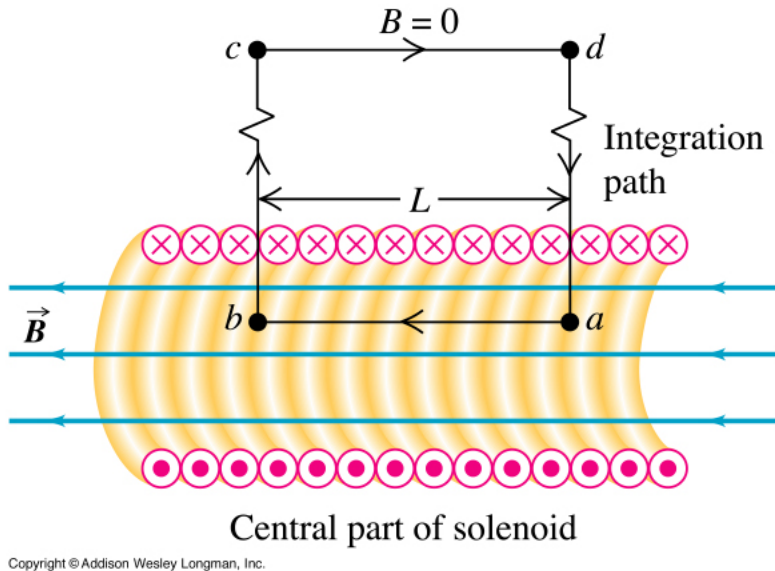
$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B \int_a^b dr = BL$$

Foreløpig har vi ikke gjort noe med høyresiden i Ampères lov. Men ved å studere figuren ser vi raskt at den totale strømmen innenfor kurven er  $NI$ , siden hver av ledningsviklingene fører strømmen  $I$ .

Dermed har vi funnet et uttrykk for magnetfeltet fra en spole:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \qquad \text{Magnetfelt fra en spole} \qquad (23)$$

Det vi egentlig er interessert i er hvordan en induksjonstopp fungerer. Så vi returnerer til oppsettet beskrevet over, med en spole under en kjele. Vi kjenner magnetfeltet inni spolen,



Figur 4: Magnetfeltet fra en spole, inntegnet en tenkt integrasjonskurve.

men la oss tenke oss at det samme uttrykket gjelder også rett over toppen av spolen. (Det gjør det faktisk, til god tilnærming.) Det betyr at vi har et magnetfelt

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

*inne i kjelen!* Det eneste som mangler er å få induisert en strøm i kjelen. Da trenger vi Faradays induksjonslov, som jeg skriver opp på nytt her:

$$\oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial \Phi_{B,A}}{\partial t} \quad \text{Faradays induksjonslov} \quad (24)$$

I den kvalitative beskrivelsen av induksjonstoppen skrev jeg at man setter en vekselstrøm på spolen. Her ser vi grunnen: Det induserte elektriske feltet avhenger av den tidsderiverte av magnetfeltet. Det blir altså ikke noe schwing over det med et konstant felt. La oss derfor anta at vi har en strøm  $I = I(t)$  på følgende form:

$$I(t) = I_0 \sin t$$

Det er en realistisk modell for en vekselstrøm. Magnetfeltet fra spolen (og inne i kjelen!) blir da

$$B = B(t) = \frac{\mu_0 N I_0 \sin t}{L}.$$

Vi sier at kjelen har et areal  $A$ , slik at den magnetiske *fluksen*  $\Phi_{B,A}$  gjennom kjelebunnen blir

$$\Phi_{B,A}(t) = \frac{\mu_0 N A I_0 \sin t}{L}.$$

Da får vi at høyresiden i Faradays induksjonslov er

$$-\frac{\partial \Phi_{B,A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 N A I_0 \cos t}{L}.$$

Fra elektrostatikken vet vi at venstresiden, som er et linjeintegral av elektrisk felt, er ekvivalent med en *elektrisk spenning*. (Måles i volt.) I induksjonssammenhenger er det vanlig å kalle den for *elektromotorisk spenning* og notere den med  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \oint_{C=\partial A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (25)$$

Faradays induksjonslov lyder altså

$$\varepsilon(t) = -\frac{\mu_0 N A I_0 \cos t}{L}.$$

Jeg er redd dette ble en del matematikk – forhåpentligvis henger du fremdeles med! Nå er det nemlig på tide å se etter hva vi har funnet:

Vi har vist at magnetfeltet fra spolen i induksjonstoppen trenger seg inn i bunnen av kjelen og gir opphav til en elektromotorisk spenning  $\varepsilon(t)$ . Denne spenningen har form som en cosinus-funksjon, så den bytter hele tiden fortegn ettersom tiden går. Det betyr at elektronene som sitter i metallet i kjelen hele tiden vil bli utsatt for et potensial som skifter fortegn, og drar dem fram og tilbake inne i kjelen. Elektroner i bevegelse lager en *strøm*  $I_{\text{indusert}}$ . Fra naturfag på videregående vet vi at strøm ganger spenning er lik *effekt*:

$$P = UI = \varepsilon I_{\text{indusert}}$$

Dette viser at det er en varmeutvikling på  $P$  watt per sekund i bunnen av kjelen, og vi har en induksjonskomfyr.

## 5 Gauss' lov for magnetisme

Nå har vi kommet fram til den siste Maxwell-ligningen. Det er også den som ser absolutt enklest ut:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{Gauss' lov for magnetisme} \qquad (26)$$

Vi har sett alle de tre andre ligningene brukt på konkrete eksempler. Gauss' lov beskriver elektrostatiske fenomener, Ampères lov magnetfelt som oppstår av strømmer og Faradays induksjonslov tidsvariasjon av magnetfelt. Gauss' lov for magnetisme har ikke slike konkrete bruksområder; den er snarere en viktig teoretisk komponent. Den forteller nemlig at *magnetiske feltlinjer har ikke noen begynnelse eller slutt*.<sup>5</sup> Det vil si at de enten er lukkede kurver, eller så strekker de seg fra uendelig til uendelig uten å stoppe noe sted. En sirkel, som vi fant for magnetfeltet fra en rett leder, er kroneksempelen på en lukket kurve. I spolen, som vi studerte i forrige seksjon, går det midt i spolen en feltlinje som kommer opp fra uendelig, går gjennom spolen og fortsetter videre i uendeligheten. Coulombs lov, som vi utledet i seksjon 2, forteller at det elektriske feltet fra en punktladning peker i rette stråler ut fra ladningen – det går altså *ikke* an for magneter, fordi strålene *begynner* i punktet der ladningen er.

La oss sjekke at  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  er det samme som at feltlinjene ikke har noen begynnelse eller slutt. Ved divergensteoremet kan vi skrive om ligningen som vanlig ved å velge en lukket flate  $A$  (integralet av null er null, så høyresiden forandres ikke):

$$\iint_{C=\partial A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Så fluksintegralet av magnetfeltet er null rundt alle lukkede flater  $A$ . Det betyr, litt kvalitativt formulert, at “det må komme like mye magnetfelt ut av flaten som det går inn”. Og det er nettopp det kravet vi har stilt. Hvis vi legger en kurve et sted i rommet, og det går en magnetisk feltlinje gjennom den, så må enten 1) feltlinja både gå inn i flaten og ut igjen, eller 2) holde seg helt innenfor flaten (som betyr en lukket kurve). Vi kan aldri finne en kurve som omslutter “enden” av feltlinja, fordi en slik ende ikke fins.

Hvis vi husker tilbake til seksjon 3.1 og utledningen av magnetfeltet rundt en strømførende leder, så var vi der nødt til å anta at magnetfeltet dannet sirkler. Når vi nå har Gauss' lov for magnetfelt så er ikke det lenger nødvendig. Da kan vi argumentere som følger:

Vi vet at det må dannes magnetiske feltlinjer rundt lederen, men vi vet ikke hvilken form de har. Hvis vi betrakter symmetrien i problemet, så ser vi at de er nødt til å være symmetriske rundt lederen. Det betyr at de enten kan være sirkulære rundt lederen, eller peke rett ut av lederen, eller en kombinasjon av de to. Men hvis en komponent av feltlinjene peker rett ut av lederen, så betyr det at feltlinjene har et startpunkt! Og vi har bevist at det ikke er mulig. Dermed kan vi konkludere med at feltlinjene *må* være sirkler.

<sup>5</sup>For de mer teoretisk interesserte, så sier den ekvivalent at det ikke fins magnetiske monopoler.



## 6 Elektromagnetiske bølger

Den store triumfen til James Clerk Maxwell da han samlet ligningene sine og satte dem i system, var at han klarte å forutsi eksistensen av *radiobølger*. Ved hjelp av rent matematiske manipuleringer av ligningene, viste han at de var forenelige med en selv-oppretholdende bølge som strakte seg gjennom rommet. Det var til og med mulig å beregne hvilken hastighet disse bølgene måtte ha – og det er selvfølgelig lysfarten. Det tok mange år fra Maxwell påsto at radiobølger fantes, til de ble oppdaget av Heinrich Hertz. Et notat om Maxwells ligninger er således ikke helt fullstendig uten å nevne elektromagnetiske bølger. Her følger derfor en utledning av *bølgeligningen*.

Vi begynner med å rekapitulere alle de fire ligningene samlet:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{Gauss' lov} \qquad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{Ampère-Maxwells lov} \qquad (28)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{Faradays induksjonslov} \qquad (29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{Gauss' lov for magnetisme} \qquad (30)$$

For ordens skyld tar vi en gjennomgang av symbolene:  $\mathbf{E}$  er den elektriske feltvektoren,  $\mathbf{B}$  den magnetiske feltvektoren,  $\rho$  elektrisk ladningstetthet,  $\mathbf{J}$  elektrisk strømtetthet,  $\epsilon_0$  elektrisk permittivitet i vakuum og  $\mu_0$  magnetisk permeabilitet i vakuum. De to siste størrelsene er konstanter med verdiene:

$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \qquad (31)$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \qquad (32)$$

Det er viktig å påpeke at i denne utledningen, i motsetning til i seksjon 3, så skal vi *ikke* se bort fra det andre leddet på høyresiden i Ampère-Maxwells lov. Det er derimot faktisk instrumentelt for å få en bølge til å opprettholde seg selv.

Bølgeligningen kan utledes med ganske få skritt, ved å manipulerere Maxwell-ligningene på en lur måte. Først trenger vi imidlertid en matematisk relasjon, som gjelder for tre vilkårlige vektorer (se f.eks. Rottmann):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \qquad (33)$$

Til vårt formål setter vi  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \nabla$  og  $\mathbf{c} = \mathbf{E}$ . Dermed får vi

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -(\nabla \cdot \nabla)\mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \qquad (34)$$

Vi gjenkjenner Laplace-operatoren  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ . Vi setter den inn og får

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (35)$$

Så betrakter vi Maxwell-ligningene. Vi er interessert i bølgeligningen for vakuum, og vi vet at *i vakuum er det null ladningstetthet*,  $\rho = 0$ . Dermed vet vi fra Gauss' lov, ligning (2), at

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (36)$$

Vi setter inn dette på høyre side av ligning (35), slik at det ene leddet forsvinner. Vi har da

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (37)$$

Så bruker vi Faradays induksjonslov (ligning (3)) til å bytte ut venstresiden, og får

$$\nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \mathbf{E} \quad (38)$$

Vi kan flytte minustegnet på venstre side utenfor curl-operasjonen, og dermed stryke minustegnene mot hverandre:

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (39)$$

Siden  $\nabla$ -operatoren kun deriverer med hensyn på romlige variable, kan vi bytte om rekkefølgen på derivasjonene på venstresiden:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (40)$$

Til slutt ser vi på Ampère-Maxwells lov (ligning (5)). Siden vi er i vakuum er det ingen ladningstetthet, og heller ingen ladningstransport – det vil si at *strømtettheten*  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ . Vi får da bare ett ledd på høyresiden av ligning (5). Setter inn:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (41)$$

Konstantene kan vi trekke utenfor derivasjonsoperasjonen, og vi får da dobbeltderivert mhp. tid:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} \quad (42)$$

Dette er bølgeligningen for en elektromagnetisk bølge i vakuum. Det er vanlig å skrive den med konstantene på høyre side:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \nabla^2 \mathbf{E} \quad (43)$$

Felles for alle slike bølgeligninger er at koeffisienten på høyresiden, i vårt tilfelle

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (44)$$

svarer til *kvadratet av bølgens hastighet*:

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = v^2 \quad (45)$$

For en elektromagnetisk bølge er ikke  $v$  noe annet enn den velkjente *lyshastigheten i vakuum*:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad (46)$$

## 6.1 Løsninger av bølgeligningen

Vi har utledet bølgeligningen for det elektriske feltet. Det er mulig å finne en helt tilsvarende ligning med det magnetiske feltet i stedet, og begge disse ligningene må være oppfylt for at vi skal ha en bølge.

Det fins uendelig mange løsninger av disse ligningene. Den enkleste løsningen er

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{i} \quad (47)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \cos(kz - \omega t) \mathbf{j} \quad (48)$$

De ekstra observante vil oppdage at de to feltene står normalt på hverandre, selv om bølgeligningen ikke stiller krav om det. Det viser seg imidlertid at de må det for å oppfylle Maxwell-ligningene. Det går også an å vise at amplitudene  $E_0$  og  $B_0$  er proporsjonale, med forholdet

$$E_0 = cB_0. \quad (49)$$

Disse to kravene kan oppsummeres i ligningen

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (50)$$

Det siste spørsmålet som står ubesvart er: Hva betyr bokstavene  $k$  og  $\omega$  i uttrykket (47)? Ved å sette inn for  $E$  på begge sider av bølgeligningen, så ser vi raskt at det er et krav på dem:

$$\omega^2 \mathbf{E} = k^2 c^2 \mathbf{E} \quad (51)$$

$$\Rightarrow \omega = kc \quad (52)$$

Dette ligner mistenkelig på relasjonen mellom frekvens og bølgelengde,  $f\lambda = v$ . Og ganske riktig:

$$\omega = 2\pi f \quad (53)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (54)$$

## 6.2 Anvendelse: Polarisering

Uttrykkene over for det elektriske og det magnetiske feltet er løsninger av bølgeligningen, og dermed gyldige elektromagnetiske bølger. Men de er ikke de eneste gyldige løsningene. Vi kan for eksempel legge til et sinusledd i tillegg: (Vi ser her bare på det elektriske feltet, men det magnetiske feltet blir automatisk bestemt.)

$$\mathbf{E} = E_1 \cos(kx - \omega t) \mathbf{i} + E_2 \sin(kx - \omega t) \mathbf{j} \quad (55)$$

Denne bølgen *dreier*. Ved  $t = 0$  er  $\cos$  maksimal, mens  $\sin$  er null (forutsatt at vi står i samme punkt  $x = 0$ ). Ved  $t = \pi/2\omega$  er det omvendt. Hvis vi tenker oss at vi står rett bak bølgen og ser på spissen av vektoren  $\mathbf{E}$ , vil vi se at den tegner en sirkel mot klokka mens bølgen propagerer.

Retningen på  $\mathbf{E}$  kalles bølgens *polarisasjon*. Bølgen (55) er en *venstrehåndts sirkulært polarisert bølge*. (Egentlig *elliptisk* polarisert dersom  $E_1 \neq E_2$ .)

Polarisasjon er et viktig og ekstremt stilig fenomen. Lys som kommer fra en lyskilde som f.eks. Sola vil ha alle mulige polariseringer innimellom hverandre, men ved å sende lyset gjennom

spesielle polarisasjonsfiltre kan vi fjerne komponenter slik at vi får entydig polarisering. Dette er mye brukt i for eksempel fotografering.

Vi skiller primært mellom *plan* og *sirkulær* polarisering. En planpolarisert bølge har alltid den samme orienteringen i rommet (f.eks. bølgen (47)), mens en sirkulært polarisert bølge dreier rundt.

## 7 Oppgaver

### 7.1 Gauss' lov

1. I en typisk tordensky kan det være samlet en totalladning på opp til 40 C innenfor et begrenset område. Anta at ladningen er jevnt fordelt innenfor et kulevolum med radius  $R$ . Finn den elektriske feltstyrken som funksjon av radius  $r$  når  $r < R$  og  $r > R$ . Hvor stor må  $R$  være for at det ikke skal bli en elektrisk utladning? Dielektrisitetskonstanten for tørr luft er  $3 \times 10^6$  V/M.
2. En sfærisk-symmetrisk ladningsfordeling med radius  $R$  gir et elektrisk felt  $E_r$  gitt ved

$$E_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right) \quad \text{for } r \leq R \text{ og}$$
$$E_r = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{for } r > R$$

- a) Bruk Gauss' lov til å finne ladningstettheten  $\rho(r)$  for  $r < R$ , og finn  $Q_0$  uttrykt ved  $\rho_0$  og  $R$ .
- b) Beregn potensialet  $V(r)$  for  $r \leq R$  og for  $r > R$ . Husk at potensialet er definert ved (sett  $V(\infty) = 0$ ):

$$V(r) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}$$

*Hint:* Divergensen til et vektorfelt  $\mathbf{A}$  i kulekoordinater er

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

3. En kulesymmetrisk ladningsfordeling har ladningstetthet (ladning per volumenhet)

$$\rho(r) = \rho_0(1 - r^2/a^2) \quad \text{for } 0 \leq r \leq a$$
$$\rho(r) = 0 \quad \text{for } r > a$$

der  $\rho_0$  er ladningstettheten i origo,  $a$  er ladningsfordelingens radius og  $r$  er avstanden fra origo. (Vi antar den dielektriske konstanten  $\kappa = 1$  overalt.)

- a) Skissér  $\rho(r)$  som funksjon av  $r$  og finn fordelings totale ladning.
- b) Finn den elektriske feltstyrken  $E(r)$  og potensialet  $V(r)$  for  $r > a$ .
- c) Finn  $E(r)$  og  $V(r)$  for  $r < a$ .
- d) For hvilken verdi av  $r$  har  $E(r)$  sin maksimale verdi?
- e) Skissér  $E(r)$  i hele området  $0 \leq r < \infty$ .

## 7.2 Ampère-Maxwells lov

1. Jordens magnetfelt kan betraktes som et tilnærmet dipolfelt fra en magnetisk dipol i sentrum av jorden og med størrelsen  $m = 8.0 \times 10^{22} \text{ Am}^2$ . Den radielle og tangentielle komponenten av magnetfeltet i avstanden  $r$  fra dipolen er gitt ved

$$B_r = \frac{\mu_0 m \cos \phi}{2\pi r^3} \text{ og } B_\phi = \frac{\mu_0 m \sin \phi}{4\pi r^3}$$

der  $\phi$  er vinkelen mellom dipolen  $\mathbf{m}$  og radiusvektor  $\mathbf{r}$ . Finn størrelse og retning på magnetfeltet

- a) ved jordens magnetiske ekvator,
- b) ved  $60^\circ$  nordlig bredde og
- c) ved den magnetiske nordpolen.

Ren med jordradius  $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ , og legg merke til at for den nordlige breddegrad  $\theta_N$  er  $\theta_N = \phi - \pi/2$ .

2. En uendelig strømførende kobberplate med tykkelse  $d$  ligger i  $xy$ -planet. I platen går det en strøm med strømtetthet  $\mathbf{J}$  parallelt med  $y$ -aksen.
  - a) Finn størrelse og retning på magnetfeltet på oversiden og undersiden av platen.

Vi tenker oss nå en liknende plate parallell med den første og i høyden  $h$  over denne. Strømtettheten er den samme, men i motsatt retning.

- b) Finn magnetfeltet mellom og utenfor platene.

3. Mellom to parallelle ledere med lengde  $L$  og innbyrdes avstand  $R$  virker den gjensidige kraften

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} L$$

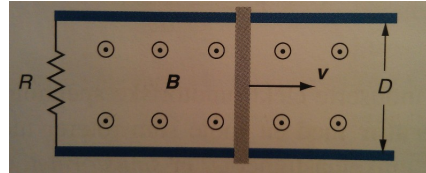
der  $I_1$  og  $I_2$  er strømmene i de to lederne. Bruk det til å løse følgende oppgave:

En høyspentlinje består av to ledninger 15 m over bakken og med 3 m avstand. Hver av ledningene fører strømmen 10 A, og strømmen går i motsatt retning i de to ledningene.

- a) Finn størrelse og retning på den gjensidige magnetiske kraften per 100 m av ledningene.
- b) Bruk Ampères lov til å bestemme størrelsen på magnetfeltet på bakken i et punkt midt mellom de to ledningene. (Her er det ikke noe tidsvarierende felt, så Ampère-Maxwell reduserer seg til Ampère.)
- c) Hvor stort er dette feltet i forhold til det jordmagnetiske feltet på  $60^\circ$  nordlig bredde? (Jf. oppgave 1.)

### 7.3 Faradays induksjonslov

1. En metallstav glir friksjonsfritt og med konstant hastighet  $v$  på to metallskinner med avstand  $D$  som vist på figuren. Skinnene er forbundet med en motstand  $R$ , og vi kan se bort fra motstanden i skinnene og metallstaven. Gjennom den lukkede sløyfen går det et konstant magnetfelt  $B$  med retning ut av papirplanet og vinkelrett på sløyfen.



- a) Finn størrelse og retning på den induserte strømmen når  $D = 10$  cm,  $v = 5$  m/s,  $R = 0.5 \Omega$  og  $B = 1$  T. *Hint:* Bruk Faradays induksjonslov for å finne elektromotorisk spenning  $\varepsilon$ , og husk *Ohms lov*  $V = RI$ .
  - b) Hvor stor effekt forsvinner i motstanden? *Hint:* All spenningen  $\varepsilon$  må kompenseres over motstanden, sånn at total spenningsendring rundt kretsen er null. Videre gjelder for elektrisk effekt at  $P = UI$ .
  - c) Hva er den magnetiske kraften på staven? Her trenger du å vite at kraften på en rett leder av lengde  $L$  som fører en strøm  $I$  i et magnetfelt  $B$  er  $F = ILB$ .
  - d) Hvilken mekanisk effekt må vi tilføre for at staven skal holde konstant fart?
2. En ledende sløyfe med areal  $S = 0.01$  m<sup>2</sup> roterer med konstant vinkelhastighet  $\omega = 10\pi$  s<sup>-1</sup> om en akse vinkelrett på et magnetfelt vinkelrett på et magnetfelt  $B = 1$  T. Sløyfen er forbundet med en ytre motstand  $R = 1 \Omega$ , og vi ser bort fra motstanden i sløyfen. Ved tiden  $t = 0$  er sløyfens plan vinkelrett på magnetfeltet.
    - a) Finn den induserte elektromotoriske spenningen  $\varepsilon(t)$  i sløyfen som funksjon av tiden  $t$ . *Hint:* Regn ut prikkproduktet mellom arealvektoren  $\mathbf{A}$  til sløyfen og magnetfeltet  $\mathbf{B}$  som funksjon av tiden, og bruk Faradays induksjonslov.
    - b) Finn den dissiperte effekten  $P(t)$  i motstanden som funksjon av tiden  $t$ . (Dissipert effekt = varmeutvikling i motstanden.)
    - c) Finn det mekaniske kraftmomentet på sløyfens akse som funksjon av tiden  $t$ .
    - d) Hva blir den dissiperte effekten om motstanden halveres?

### 7.4 Elektromagnetiske bølger

1. Bruk verdiene som er oppgitt for  $\varepsilon_0$  og  $\mu_0$  til å sjekke at du får det riktige tallet for lysfarten  $c$ . Sjekk også at enhetene stemmer. Du vil få bruk for følgende:

*Farad* er enheten for kapasitans, og er definert som  $1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}}$  der C er coulomb og V er volt.

*Henry* er enheten for induktans, definert som  $1\text{H} = \frac{1\text{V} \cdot 1\text{s}}{1\text{A}}$ , der V er volt, s er sekund og A er ampère.



2. Sett inn uttrykket (47) i bølgelikningen (43), og sjekk at likningen er oppfylt. Sjekk også at du får det riktige kravet på  $k$  og  $\omega$ .
3. Utled bølgelikningen for det magnetiske feltet i stedet for det elektriske feltet. Uttrykket du skal fram til er dette:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (56)$$

Alle triks er tillatt.

4. Uttrykket (55) kalles en *venstrehånds sirkulært polarisert bølge*. Forklar hvor “venstrehånds” kommer fra. Hvordan ville du skrevet ned en høyrehånds sirkulært polarisert bølge? Sjekk at begge uttrykkene oppfyller bølgelikningen.
5. Polarisering ligger bak 3D-teknologien som brukes på kinoer. Ved å sende lys med forskjellig polarisering på to forskjellige projektorer og utstyre publikum med brilleglass med forskjellig polarisering, får man øynene til å oppfatte hvert sitt bilde. Det er vanlig å bruke sirkulært polarisert lys til dette – man sender da venstrehåndspolarisert lys til det ene øyet, og høyrehåndspolarisert lys til det andre. Hvorfor er det bedre enn å bruke planpolarisert lys?
6. Ta utgangspunkt i uttrykket for den elektriske komponenten til en venstrehåndspolarisert EM-bølge, og finn det tilsvarende uttrykket for magnetfelt-komponenten.
7. Vis vektorrelasjonen

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} \quad (57)$$

for tre vilkårlige, tredimensjonale vektorer.