

MATEMATISK MODELLERING AV HAVBØLGER.

foredrag holdt på fellesmøtet i Bergen den 1. november 2001 av professor
Kristian B.Dysthe

Havbølger og matematiske modeller. Det høres ut som en noe usannsynlig kombinasjon. Når en iakttar et opprørt hav virker det kaotisk. Som om det knapt kan finnes noen orden og lovmessighet der. Men det er bare tilsynelatende. I virkeligheten finnes det ganske mye kunnskap om disse bølgene [1-3] Det er ikke spesielt enkelt å popularisere hva den matematiske modelleringen består i. Språket som disse modellene er formulert i høver dårlig for et foredrag som dette, hvor en forsøker å nå ut over snevre faggrenser. Når jeg likevel gjør et forsøk er det godt å ha noe så konkret som havbølger å støtte seg til! Fenomenet bølger har vi alle et visst forhold til.

Foranledningen til valget av et slikt tema er at jeg for tiden står midt oppe i et forskningsprosjekt som tar sikte på å bringe til veie ny kunnskap om ekstreme havbølger ved hjelp av matematisk modellering og simulering.

Først gis en kort innføring i noen av begrepene som teorien for havbølger dreier seg om. Noen få smakebiter fra den matematikken som teorien er formulert i er ikke til å unngå, men stort sett brukes figurer istedet for ligninger.

I den siste delen gis en motivering for studiet av ekstremt store bølger. Det antydes hvordan en går fram for å simulere et hav med stormbølger. Det var vanskeligere enn vi hadde regnet med. Det ser nå imidlertid ut til at problemene er løst slik at vi kan gå i gang med å samle datamateriale ved simulering. Behandlingen av dette store datamaterialet vil nok ta tid. Så det får være til en annen gang.

Noen grunnleggende fakta om havbølger.

Selv om bevegelsen av en væske har uendelig mange frihetsgrader er den likevel bestemt av dynamiske lover. Disse uttrykker at masse og momentum bevares under bevegelsen, og er formulert i et matematisk språk (partielle differensialligninger). Det finnes selvsagt en uendelighet av mulige bevegelser. Utfordringen er derfor å finne de som svarer til det fenomenet en vil studere.

Innen naturvitenskapen har vi jo som prinsipp å søke oss fram til grunnleggende byggesteiner ved beskrivelsen av et fenomen. Når det gjelder bølger

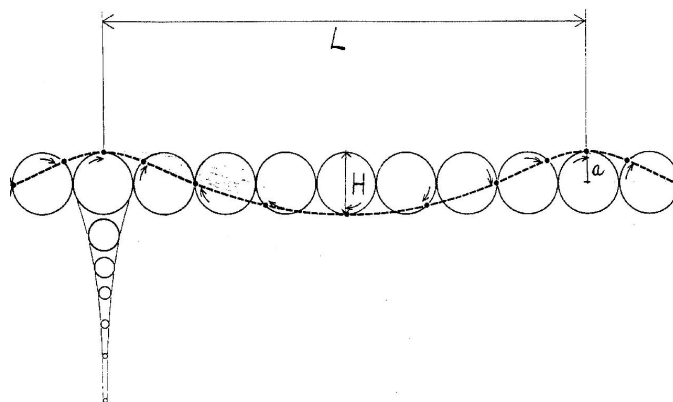


Figure 1: Elementær bølge.

er det enkleste objektet et *periodisk bølgetog*. Det vil si en bølge som er periodisk både i rom og tid, med en *bølgelengde* L , en *periodetid* T og en *amplitude* a . (Figur (1)). Med *bølgeøyden* H menes høydeforskjellen mellom en bølgedal og den påfølgende bølgekam. For en periodisk bølge blir derfor $H \simeq 2a$. I stedet for bølgelengde og periode er det ofte hensiktsmessig å bruke størrelsene *bølgetall* k og *frekvens* ω gitt ved relasjonene

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad \text{og} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Den første som studerte en slik bølge teoretisk var Franz Josef von Gerstner¹. I hans arbeid *Teorie der Wellen* fra 1802 [4] fant han en eksakt periodisk løsning av de dynamiske ligningene for væsker med en fri overflate. Fra denne løsningen fikk han sammenhengen mellom k og ω (eller L og T) på den enkle formen

$$\omega^2 = gk \tag{1}$$

hvor g er tyngdens aksellerasjon ($g \simeq 9.81m/s^2$). Han fant at overflaten har form som en omsnudd *trokoid*. En trokoid-kurve kan genereres av et punkt på en sirkulær skive som ruller uten å gli på et plant underlag (Figur (2))². Bølgelengden for trokoiden blir da lik omkretsen til skiven, derfor

¹Franz Josef von Gerstner (1789-1823) var professor i matematikk i Praha.

²Dersom punktet ligger på skivens periferi kalles kurven for en sykloide.

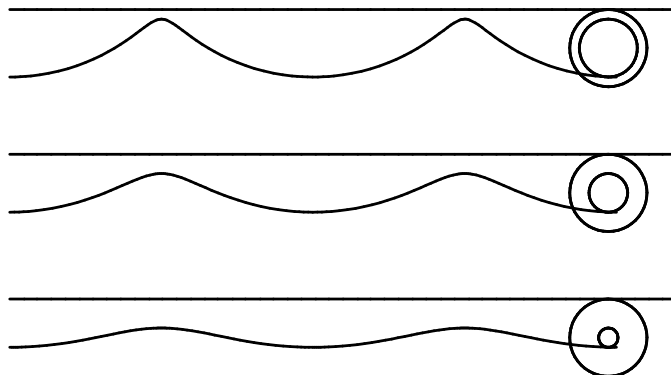


Figure 2: Gerstners konstruksjon av overflaten som en trokoide.

er skivens radius $L/2\pi = 1/k$. Det er fristende å sammenstille (1) med formelen for frekvensen til en pendel med lengde l :

$$\omega_{pendel}^2 = \frac{g}{l}$$

som ville være samme formel dersom l erstattes med $1/k$.

Videre fant Gerstner at væskepartiklene utfører sirkulære bevegelser. Radien i denne bevegelsen er ved overflaten lik bølgeamplituden a , men den avtar fort (eksponensielt) nedover i væsken³. Denne modellen for en bølge viste seg å være korrekt når amplituden er mye mindre enn bølgelengden det vil si når $ka \ll 1$. Størrelsen ka som er et ubenevnt tall, kalles for bølgens *steilhet* og er et mål for den maksimale helningen på overflaten. For steilere bølger gir ikke Gerstners løsning noen god beskrivelse av det fysiske bølge-fenomenet. Det betyr ikke at løsningen hans ikke er korrekt, men at den beskriver en fysisk mulig bevegelse som vanskelig lar seg realisere i praksis. En påminnelse om at ikke alle løsninger av de dynamiske ligningene har fysisk relevans selv om de i prinsippet er fysisk mulige.

For små steilheter ($ka \ll 1$) får en fra Gerstners løsning en sinus- eller cosinusfunksjon

$$\eta = a \cos(kx - \omega t) \quad (2)$$

hvor η betegner hevingen av overflaten over likevektsnivået, og relasjonen (1) mellom k og ω er oppfylt.

³Relasjonen (1) gjelder på dypt vann. Bevegelsen er imidlertid redusert med 96% en halv bølgelengde under overflaten, slik at på dybder større enn en halv bølgelengde vil (1) gjelde.

Det neste steg framover ble gjort av de to kjente franske matematikerne S.D.Poisson [5] og A.Cauchy [6]. I 1816 besvarte de en prisoppgave som var oppstilt av det franske vitenskapsakademi, om utbredelse av bølger fra en endelig kilde (f.eks. bølgene fra en stein som blir kastet i vannet). Deres løsning er selv i dag et mønstergyldig eksempel på anvendt matematikk.

På det eksperimentelle området har utviklingen gått noenlunde parallelt. Det første bidraget ble gitt av brødrene Ernst og Wilhelm Weber [7]. I et arbeid fra 1825 verifiserte de sammenhengen (1) mellom ω og k . De fant også at vannpartiklene hadde sirkulære baner, som Gerstner hadde forutsagt. I utgangspunktet var de skeptiske til at denne formelen ikke inneholdt væskens tetthet og gjorde derfor samme forsøket tre ganger: med vann, kvikksølv og brandy, men fant stadig den samme relasjonen!

Om de hadde kjent til den såkaldte dimensjons-analysen, som ble utviklet ca. 70 år senere ville de ikke ha vært like skeptiske. Et kjent resultat fra denne analysen sier at enhver relasjon (ligning, formel) mellom fysikalske størrelser (det vil si størrelser som har benevning så som meter, sekund osv.) må kunne skrives som en relasjon mellom *ubenevnte størrelser* som kan dannes fra de opprinnelige fysikalske størrelsene⁴.

Anta at den søkte sammenhengen mellom ω og k , foruten g inneholder tettheten av væsken ρ . Fra disse fire er det bare mulig å danne en ubenevnt størrelse nemlig

$$\frac{\omega^2}{gk} \quad \text{benevnelsen blir} \quad \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{m}{s^2} \frac{1}{m}} = 1 \quad \text{dvs. ubenevnt.}$$

og denne inneholder ikke tettheten ρ . Den søkte relasjon må derfor bli på formen

$$\frac{\omega^2}{gk} = A$$

hvor A er et (riktig nok ukjent) ubenevnt tall! Sammenligner vi med (1) ser vi at $A = 1$.

Fouriers oppdagelse.

Den fargerike franske matematiker og fysiker J.B. Fourier (1768-1830) utga i 1822 arbeidet: "Théorie Analytic de la Chaleur" [8], hvor han fremholdt at enhver rimelig funksjon kunne skrives som en sum av sinus- og cosinus-funksjoner.⁵ Fouriers anvendelser av denne teorien var, som tittelen på

⁴Som monom eller potensprodukter av disse.

⁵Da hovedresultatene hans først ble lagt fram for det franske vitenskapsakademi i 1807, møtte de en god del motsigelser. Et stringent bevis for Fouriers påstand kom først senere ved Dirichlet.

avhandlingen viser, beregning av varmeledning. Men det viste seg snart at den egnet seg ypperlig til mange formål både i matematikken og i anvendelser deriblandt bølgeteorien.

Det meste av den bølgeteorien som ble utviklet i det nittende- og første halvdel av det tyvende århundre begrenser seg til små steilheter dvs. $ak \ll 1$. Så lenge denne steilheten er et lite tall (i praksis mindre enn 0.1) er de dynamiske ligningene tilnærmet **lineære**. Lineære ligninger er noe som matematikerne er svært glade i. De har nemlig den vidunderlige egenskapen at dersom A_1 er en løsning og A_2 en annen, så vil $A_1 + A_2$ også være en løsning.

Resultatet (2) har mer å si oss. Løsningen har to frie parametre a og k , idet ω er gitt som en funksjon av k via (1) (vi må riktignok begrense oss til tilfellet $ak \ll 1$ for at (2) skal være brukbar). Når de dynamiske ligningene er lineære betyr det at vi kan bygge opp en vilkårlig løsning som en sum av elementære løsninger av typen (2) med amplitude a_n og bølgetall k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).

$$\eta = \sum_n a_n \cos(k_n x - \omega_n t + \theta_n) \quad (3)$$

hvor θ_n er fasekonstanter. Videre er $\omega_n = \omega(k_n)$ hvor sammenhengen mellom ω og k er gitt ved (1). Det overstående kan enkelt utvides til bølger som går i forskjellige retninger⁶horisontalt.

En kan nå benytte dette til å *syntetisere en havoverflate* med bølger som antydnet på Figur (3). For å gjøre dette realistisk må en imidlertid vite hvordan parametrene a_n og k_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) henger sammen for de forskjellige spektral-komponentene n . Eller hvordan *spektralenergien* a_n^2 fordeler seg på de forskjellige bølgetall k_n . Her må en støtte seg til empirisk kunnskap, for dette sier lineær teori ingenting om. Fasene θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) velger en slumpmessig slik at de enkelte leddene i (3) blir statistisk uavhengige. Slik kan en simulere bevegelsen av overflaten på en forholdsvis realistisk måte, og inntil ganske nylig var dette den eneste måten en kunne gjøre det på⁷.

Et enkelt spesialtilfelle av (3) gir innsikt i en viktig egenskap ved havbølgene. Vi ser på summen av to elementærbølger med samme amplitude, men med

⁶Vi må da erstatte bølgetallene k med vektorer (k_x, k_y) hvor sammenhengen med ω blir $\omega^2 = g(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$.

⁷En kunne imidlertid ta hensyn til noen ikke-lineære effekter i modellen: de som til enhver tid gir "nesten" samme resultat som den lineære teorien, men ikke overfører energi mellom frekvens-komponentene.

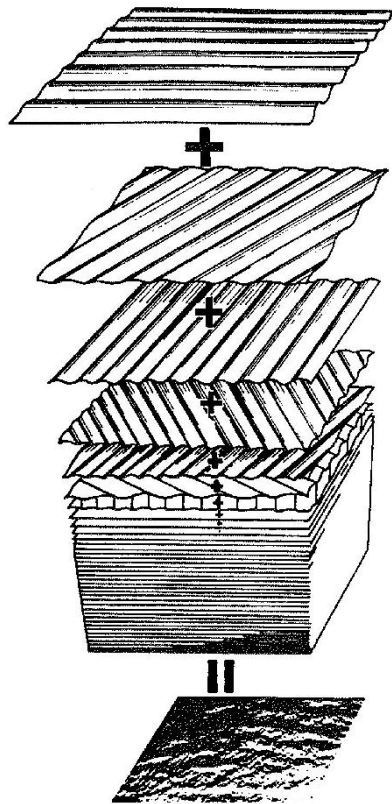


Figure 3: Havoverflaten som en sum av elementærbølger.

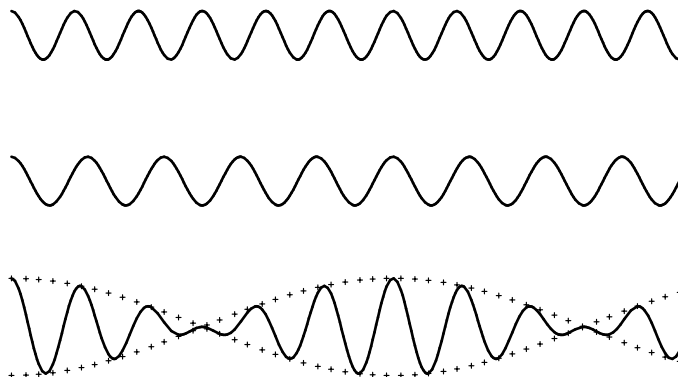


Figure 4: Summen av to elementærbølger med litt forskjellig bølgelengde gir periodiske grupper.

litt forskjellige bølgetall k og $k + \Delta k$. Dette gir

$$\begin{aligned} \eta &= a \cos [kx - \omega(k)t] + a \cos [(k + \Delta k)x - \omega(k + \Delta k)t] \\ &\simeq 2a \cos [\Delta k(x - tV)] \cos [k(x - tV_f)] \end{aligned} \quad (4)$$

hvor størrelsen V kalles for *gruppehastigheten* og kan finnes fra (4) og (1) som

$$V = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} V_f = \frac{g}{2\omega} \quad (5)$$

Fra uttrykket (4) og Figur (4) ser vi at denne kombinasjonen resulterer i periodiske grupper av bølger.

De to hastighetene.

Fra eksemplet ovenfor er det klart at en har to forskjellige hastigheter: (i) *Fasehastigheten* $V_f = \omega/k$ angir hvor fort bølgemønsteret forflytter seg (f.eks farten til en bølgerygg). (ii) *Gruppehastigheten* V angir hastigheten til en gruppe av bølger (omhyllningskurvene i Figur (4)). Dette er den hastigheten som energien transporteres med. Fra (5) ser vi at $V = V_f/2$. Når en betrakter en gruppe av bølger ser det ut som om bølgene skapes i bakkanten, for så å bevege seg framover og endelig forsvinne i gruppens forkant.

Bølgene egner seg ikke som informasjonsbærere slik som lydbølger og elektromagnetiske bølger (om noen skulle ha tenkt på den muligheten!). Ethvert endelig signal består av mange frekvens-komponenter. Da hver

komponent går med sin egen hastighet (som er omvendt proporsjonal med frekvensen (se (5)), vil signalet fort bli forvrengt til det ugjenkjenkelige. Det betyr ikke at bølgene er uten informasjonsverdi. Forstyrrelsen fra en endelig kilde enten det er fra en stein som blir kastet i vannet, eller fra et stormsentrum i et verdenshav, bærer informasjon om hvor og når denne begivenheten hendte. Nemlig den informasjon som ligger i ankomst-tiden til de forskjellige frekvenskomponentene. Den tiden τ det tar for bølger med frekvens ω å bevege seg fra kildeområdet (steinkastet eller stormen) til det stedet hvor vi observerer dem blir $\tau = D/V = 2D\omega/g$ hvor D er avstanden. Frekvensen ω blir da følgende funksjon av tiden

$$\omega = \frac{g}{2D}\tau$$

som sier at frekvensen øker proporsjonalt med transitt-tiden τ . Stormen som skapte bølgen er fjern både i tid og rom. En storm som fant sted 5000 km ute på havet vil skape store bølger som etter ca. 6 døgn når inn til kysten i form av dønninger. I prinsippet kan en observatør ved kysten, utstyrt med stoppeklokke og papir, måle periodetiden til dønningene som skyller inn over stranden. Dersom en gjør dette for eksempel annenhver time og samler data over et par døgn, kan en finne ut når stormen herjet som verst, og avstanden til denne begivenheten⁸, som antydnet på Figur (5).

Steile bølger og ekstrembølger.

For steile bølger (i praksis for $ak > 0.1$) er ikke Gerstners resultat anvendelig. Stokes (1847) [9] derimot klarte å finne relevante løsninger for periodiske bølger. Han fant at den teoretisk steileste bølgen som kunne forekomme var når $a/L \approx 1/14$, og denne hadde flate buker og hjørneaktige bølgekammer med en hjørnevinkel på 120° .

De lange stormbølgene, som er bærere av det meste av bølge-energien, er ikke spesielt steile. Derfor er den lineære teorien en rimelig bra approximasjon til mange formål. Det betyr ikke at de såkaldt ikke-lineære effektene er uten betydning. De innebærer at de forskjellige frekvenskomponenter som et opprørt hav består av ikke er uavhengige, men kan vekselvirke med hverandre. Selv om denne vekselvirkningen er svak kan den forårsake kraftige effekter når den får virke over tid.

Først på midten av 1960 tallet kom det fart i forskningen på ikke-lineære

⁸I praksis kan dette bli komplisert ved at dønning kan skrive seg fra mer enn et stormområde.

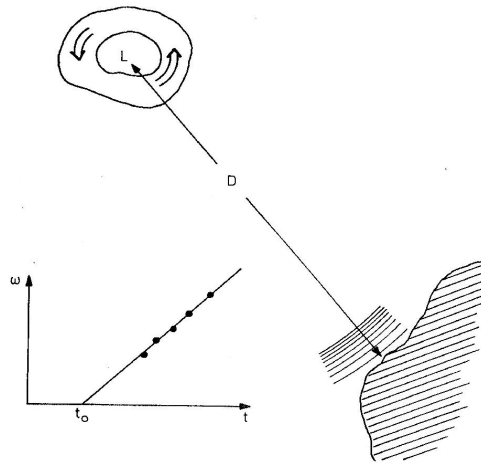


Figure 5: Transitt-tiden for dønninger fra en storm er proporsjonal med frekvensen.

bølgeeffekter⁹ (se f.eks. Whitham 1974 [10]). De siste årene har en vært spesielt opptatt av den innflytelse disse effektene kan ha på forekomsten av *ekstreme bølger*. Det ligger i sakens natur at det empiriske materialet en har for slike bølger blir svakere jo mer ekstreme hendelser en snakker om. ”100-års bølgen” er den største bølgen som forventes å treffe et gitt sted på havet (f.eks. en offshore installasjon) i løpet av 100 år. Dersom en bare har *én* bølgemåler må en vente i 100 år for å være rimelig sikker på at en har et eksemplar av arten.

Da oljealderen gjorde sitt inntog i Norge forlangte myndighetene at selskapene som skulle konkurrere om tildeling av blokker, måtte foreta bølgemålinger. Målingene som ble fortatt på 70- og 80-tallet ble et trist kapittel når det gjaldt ekstrembølger. Basert på kunnskapen på 70-tallet ble det benyttet en automatisk datakontroll. Denne identifiserte ekstraordinært store utslag av overflaten fra likevektsnivået. De som oversteg en viss terskel ble kategorisert som målefeil¹⁰, og fjernet permanent fra tidsserien!

Danskene gikk ikke så drastisk til verks. Skourup et.al.(1996) [11] har

⁹Det startet en blomstringstid for bølge teorien med anvendelser bl.a. i akustikk, optikk og fluiddynamikk, med nye begreper som solitoner, parametrisk forsterkning, selv-fokussing og selv-modulasjon.

¹⁰Det kriteriet som ble brukt var at overflatens heving over likevektsnivået ikke skulle overstige fem standardavvik σ . Dette er noe mer enn det som senere er blitt foreslått som nedre terskel for betegnelsen ”freak”-bølge (nemlig 4.4σ).

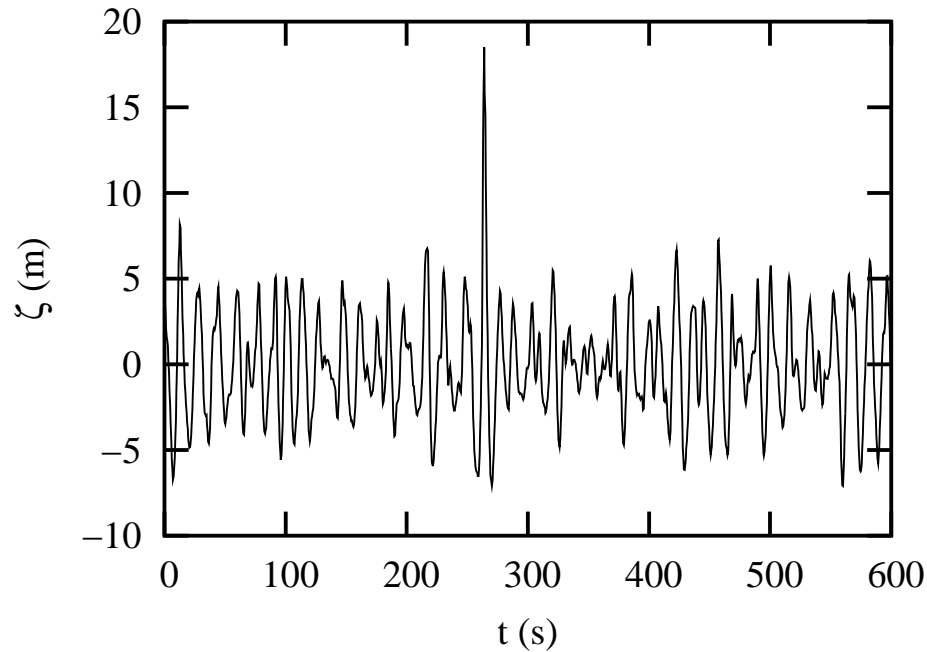


Figure 6: Bølger målt ved Draupner-plattformen i Nordsjøen nyttårsdag i 1995. Kamhøyden var her 18.5 meter, mens standardavviket ble anslått til ca.3 meter!

sett på 12 års bølgedata fra Gorm feltet i Nordsjøen. De har analysert 1673 timer med stormbølgedata (66 stormer) fra dette materialet. For å forklare noen av deres resultater trenger vi å innføre et par begrep. Kamhøyden a_c som angir høyden av en bølgekam i forhold til likevektsnivået, og standardavviket σ til overflaten fra det samme nivået ¹¹. Skourup et.el. analyserte blandt annet forekomsten av *uventet store* kamhøyder. Når kamhøyden ble større enn ca. fire og et halvt standardavvik (mer nøyaktig $a_c > 4.4\sigma$), betegnet de bølgen som en "freak". I de 12 års bølgedata som ble analysert fant de ca. 500 freak-bølger. Et eksempel på en slik freak-bølge er vist i Figur (6). Denne ble målt ved Draupner-plattformen i Nordsjøen nyttårsdag i 1995, og er blitt kjent i det internasjonale fagmiljøet som "nyttårsbølgen". Kamhøyden var her 18.5 meter, mens standardavviket ble anslått til ca.3 meter!

¹¹Den såkaldt signifikante bølgehøyde H_s er definert som 4σ .

Hva skulle en så forvente ut fra teorien? I linær teori er overflatehevnin- gen η , som vi har sett, bygget opp som summen av en mengde frekvens- komponenter (3) som er uavhengige av hverandre. Fra ”sentralgrensesetnin- gen” i statistikken forventer en da at η har en normalfordeling (eller Gaussisk fordeling). Beregningen av sannsynlighetsfordelinger for bølgeparametre som kamhøyde a_c bygger i lineær teori på denne antagelsen. Fra et slikt Gaus- sisk utgangspunkt vil kamhøyden a_c ha en fordeling $f(a_c)$ som nærmer seg en såkaldt Rayleigh- fordeling¹² for et bølgespektrum med liten frekvens- bredde. Forventningsverdien for den maximale kamhøyden, $E(a_{c\max})$, ble funnet av Longuet-Higgins (1952) [12] ut fra Rayleighfordelingen som

$$E(a_{\max}) \approx 1.4\sigma \left[(\ln N)^{1/2} + 0.288 (\ln N)^{-1/2} \right]$$

hvor N er antall bølger som analyse materialet bygger på. Dersom vi antar at materialet til Skourup et.al. har en midlere bølgeperiode på 10 sekunder, inneholder det ca. 10^6 bølger. Insatt i formelen ovenfor gir dette $\simeq 5.3\sigma$, som er signifikant mindre enn den observerte verdien $\simeq 7.2\sigma$. Betegnelsen *freak-wave* eller *rogue-wave* på representanter for denne overhyppigheten av ekstreme bølger har lenge vært i bruk i fagmiljøet.

Skourup et.al. gjorde også en annen interessant observasjon. De fant at forholdet mellom kamhøyden, a_c , og dybden av den påfølgende bølgedalen varierte, rundt en middelvei på 0.7. Dersom freak-bølgen var en del av et regulært bølgetog, eller en større gruppe av bølger skulle en forventet et forhold nær 0.5. Det ser ut til at den eneste mulige forklaring på dette er at ekstrembølgene kommer i svært korte grupper som illustrert på Figur (7). Dette gir enda en betydning til betegnelsen freak-bølge.

Forklaringsforsøk.

Ved å betrakte Figur (6) ser en at en ekstrembølge representerer en svært høy konsentrasjon av bølgeenergi i forhold til den midlere energien¹³. Kjenner en fysiske effekter som gir en slik ekstraordinær konsentrasjon eller fokusering? Svaret er ja.

Romlig fokusering. Når dybden blir mindre enn en halv bølgelengde, endres bølgens hastighet. Det samme gjelder når bølgene møter en strøm. Dersom dybden og /eller strømmen varierer fra sted til sted vil bølgene

¹²Rayleigh-fordelingen av amplituden a er gitt som $a/\sigma^2 \exp(-a^2/2\sigma^2)$ hvor σ er standardavviket til overflaten. Sannsynligheten for at en bølge skal være en ”freak” ($a_c > 4.4\sigma$) blir herfra ca. $6 \cdot 10^{-5}$.

¹³For ”nyttårsbølgen” er energitettheten ca. 18 ganger større en den midlere.

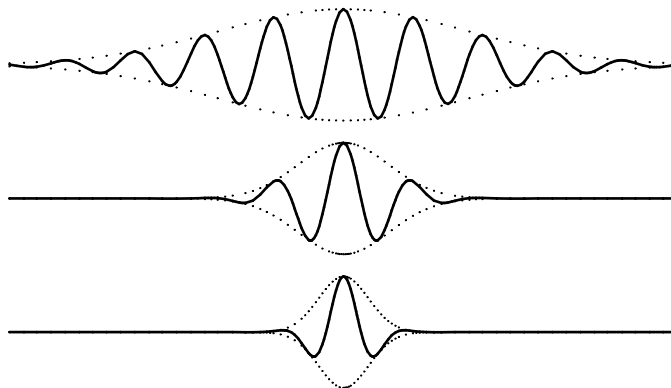


Figure 7: Forholdet mellom den største kamhøyden og dybden av den påfølgende bølgedalen, avhenger av lengden på gruppen.

bli avbøyd og fokussering (og defokussering) av bølgeenergien kan oppstå. Mange tilfeller av ekstrembølger nær kysten kan forklares ved slike effekter [13]. Notorisk er syd-øst kysten av Sør Afrika, hvor den kraftige Agulhasstrømmen, som går sydover, møter bølger fra stormer i Sydishavet [14].

Tid-rom fokussering. Denne effekten benyttes i større bølgetanker under tester med skipsmodeller. En genererer et bølgetog hvor bølgelengden varierer, med de korteste bølgene først. Da de lange bølgene går fortere enn de korte og vil de ta igjen disse, som illustrert i Figur (8), og skape store bølger over en kort tid i et område (hvor en har plasert skipsmodellen). Dette er i grunnen det omvendte av hva som skjer når en stein blir kastet i vannet: etter en kort tid vil bølgene ordne seg med de lengste foran og de korteste bak.

Ikke-lineær fokussering. Denne effekten er illustrert i Figur (9) hvor en starter med et svakt modulert bølgetog med en gitt frekvens. Modulasjonen vil da spontant øke i et mindre område. Her vil bølgehøyden øke med en faktor 3 i forhold til den en startet med. Fenomenet er kjent også for ultrakorte lypulser i optiske fibre (”breathers” [15].)

På det åpne hav hvor dypet er stort og stømhastighetene lave (av størrelsesorden 10 cm/s), kan en nok trygt avskrive den første effekten som forklaring på ekstrembølger [17]. Riktig nok er en slik teori nylig fremsatt [15], hvor en tenker seg at svake og variable havstrømmer kan forårsake fokussering eller kaustikk-fenomen analoge til de en ser på bunnen av et svømmebasseng når sola skinner. Det ble demonstrert ved numerisk simulering at en får slike fenomen når en starter med bølger som går i nøyaktig samme retning. En

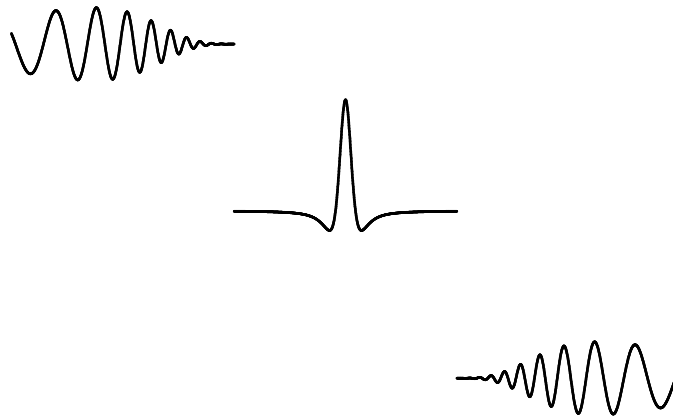


Figure 8: Et bølgetog hvor de lengste bølgene kommer sist gir fokusering. Deretter går de lengste bølgene fra de korte.

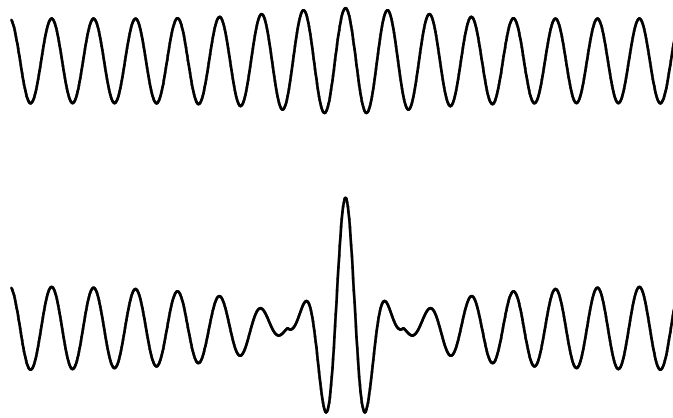


Figure 9: En svakt modulasjon av et bølgetog vokser på grunn av ikke-lineære effekter.

slik situasjon kan imidlertid ikke oppstå spontant. Om en starter med en mer naturlig spredning i forplantningsretningen til bølgene, vil en se det samme som en gjør på bunnen av svømmebassenget når belysningen blir mer diffus (sky foran solen): kaustikk-fenomenet forsvinner.

Når det gjelder de øvrige to effektene, krever også de spesielle forutsetninger. Det er vanskelig å forestille seg at disse forutsetningene kan oppstå spontant i forbindelse med en storm. Vi må altså konkludere med at de ulike mekanismene for fokusering som er nevnt ovenfor ikke synes å gi holdpunkter for en forklaring av ekstrembølger på det åpne hav. Det en da står igjen med synes å være det som ligger under lineær teori: *at en ekstrem bølge er en (lite sannsynlig) konstruktiv interferens mellom mange av komponentbølgene*. Vi vet imidlertid at disse frekvenskomponentene inngår i svake ikke-lineære vekselvirkninger. Det er mulig at disse vekselvirkningene kan påvirke sannsynligheten for konstruktiv interferens, og derfor hyppigheten av ekstrembølger. En måte å avgjøre dette på er ved å benytte simulering.

Simulering.

Som allerede nevnt ovenfor er det statistiske grunnlaget for å bestemme hyppigheten av spesielt store bølger heller svakt. Dette henger sammen med at disse observasjonene er punktmålinger, og at sannsynligheten for at en ekstrembølge skal passere en målebøye er svært liten.

I det prosjektet vi foreslår forventer vi å simulere et havområde av størrelse ca. 100×100 typiske bølgelengder (svarende til mer enn 100 kvadratkilometer). I en slik simulering, hvor det til enhver tid er ca. 10^3 bølger innenfor beregningsområdet, vil sannsynligheten for å finne ekstrembølger ha øket med nesten 10^3 i forhold til en punktmåling (når en regner at forekomsten er uniformt fordelt i rom). Det store datamaterialet som Skourup et.al. bygger på, og som er innhentet ved punktmålinger (målebøyer), svarer til ca. 10^6 bølger. For å få et like stort statistisk materiale trenger vi bare ca. 10 simuleringskjøringer av lengde ca. 100 bølgeperioder!

Simuleringsmodellen vi benytter [18],[19] er ikke-lineær og 3-dimensjonal. Den har sine klare begrensninger:

(i). Den er relativt ”smalbåndet”. Det medfører at den bare tar hensyn til bølgene nær toppen i energi-spekteret. Disse svarer til ca. 85% av den totale energien. Det vil igjen si at modellen ikke kan beskrive de kortere bølgene som rir på de store. Det er disse som er steile, stadig bryter og som hjelper til å gi det spektakulære synsinntrykket en får av et opprørt hav.

(ii). Virkningen av vinden er bare tilstede ved at den antas å ha skapt det bølgespekteret som modellen startes opp med. Det overføres ingen yt-

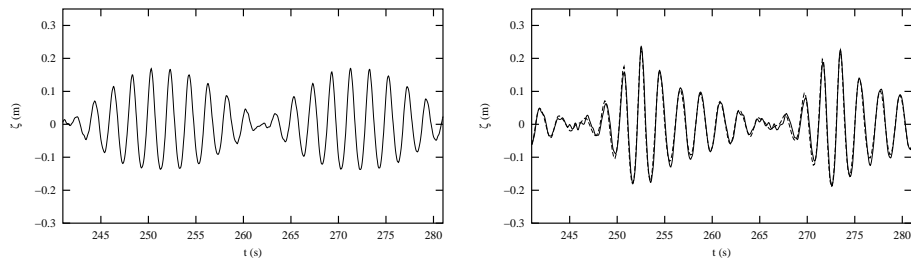


Figure 10: Målinger fra to målestasjoner som ligger i avstander henholdsvis 10m og 80m fra bølgekilden. Simuleringene initieres med måledata fra den første stasjonen og beregner hvordan bølgefeltet skal se ut ved den andre stasjonen. Resultatet sammenlignes så med målingene fra den sistnevnte.

terligere energi til bølgene. Heller ikke er det viskøs dempning eller bølgebrytning, derfor er den totale energien av bølgefeltet bevart. For velutviklede stormbølger på åpent hav (periodetider i området 7-15 sekunder) vil imidlertid energioverføringen fra vinden foregå svært langsomt (på en tids-skala av størrelsesorden 1000 bølgeperioder).

(iii). Tidshorizonten for våre simuleringer er i praksis ca. 200 bølgeperioder. Det vil si at det er konsistent å neglisjere energioverføringen fra vinden i simuleringperioden.

Modellen har vært testet på ulike vis ved hjelp av eksperimenter og mer ”eksakte” ikke-lineære modeller. I Figur (10) ser vi en sammenligning mellom en modellsimulering og et eksperiment som ble foretatt ved Marintek i Trondheim [20].

Et periodisk modulert bølgetog skapes i enden av en lang bølgetank. Figuren viser målinger fra to målestasjoner som ligger i avstander henholdsvis 10m og 80m fra bølgekilden. Simuleringene initieres med måledata fra den første stasjonen og beregner hvordan bølgefeltet skal se ut ved den andre stasjonen. Resultatet sammenlignes så med målingene fra den sistnevnte. Som en ser er det en svært god overenstemmelse. Bemerk at dersom lineær bølge teori var korrekt skulle formen på bølgetoget ikke endre seg mellom målestasjonene!

Startbetingelsene.

Simuleringsmodellen beregner (ved numerisk integrasjon) hvordan bølgefeltet (det vil blandt annet si spektralfordelingen av energien mellom de forskjellige bølgelengdene) utvikler seg i tid. Som nevnt ovenfor vil et godt utviklet

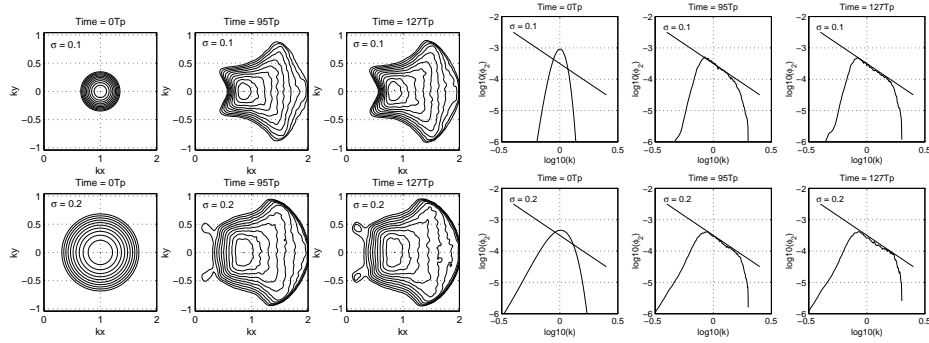


Figure 11: Evolusjon av spektralfordeling.

stormbølgespektrum bare utvikle seg langsomt (på en tidskala $\gtrsim 1000$ bølgeperioder). Typiske måleserier fra bøyemålinger på 20minutter vil inneholde ca. 80 til 170 bølgeperioder. Det er derfor en god tilnærming å regne bølgefeltet som statistisk stasjonært i denne måleperioden. Dersom modellen vår skal være realistisk må også den gi et bølgefelt som er tilnærmet stasjonært (i statistisk forstand) over et tidsrom sammenlignbart med tidshorizonten for simuleringene (det vil si ca. 100 bølgeperioder)

Ut fra det som fantes av teori da vi startet på prosjektet regnet vi med at dette ikke skulle by på problemer. Der tok vi feil.

Teorien som bygde på forholdsvis drastiske forenklinger[21] konkluderte med at dersom bredden av bølgespekteret var over en viss kritisk verdi ¹⁴ ville spekteret være stabilt og bare forandre seg på en svært lang tidskala. Det viste seg imidlertid snart at teorien ikke kunne forklare de resultatene vi fant [22].

Det vi fant var at det spekteret vi startet med forandret seg over en relativt kort tidskala (av størrelsesorden 100 bølgeperioder) for så å finne en kvasi-stasjonær form, som vist i Figur (11). Videre fant vi at når spekteret hadde ”roet seg ned” til en kvasistasjonær tilstand, hadde den delen som lå på den høyfrekvente siden av spektraltoppen en tilnærmet potenslov ω^{-4} . Dette er den spektralformen som en observerer ved bøyemålinger, noe som har øket vår tiltro realismen ved simuleringmodellen.

¹⁴Dersom spekteret har et maksimum ved k_0 og en bredde Δk , blir den kritiske verdien gitt som $\Delta k/k_0 = \sqrt{2}\sigma k_0$.

References

- [1] Lamb, H. : *Hydrodynamics*. (først utgitt 1932) Dover publications 1945
- [2] Wehausen, J.V. og Laitone, E.V. : *Surface waves*. Handbuch der Physik IX, s. 446-778, Springer-Verlag 1960
- [3] Phillips O.M. : *The dynamics of the upper ocean*. Cambridge University Press 1977
- [4] Gerstner, F. J. : *Teorie der Wellen*. Abh.d.k. böhm. Ges. d. Wiss. 1802
- [5] Poisson, S.D. : *Memoire sur la Theorie des Ondes*. Mem.de l'Acad. roy. des Sciences. France (2) 1816
- [6] Cauchy, A. : *Memoire sur la Theorie des Ondes*. Mem.de l'Acad. roy. des Sciences. France 1827
- [7] Weber, E. og Weber, W. : *Wellenlehre auf Experimente gegründet* Leipzig 1825
- [8] Fourier, J. : *Theorie analytique de la Chaleur*. Paris 1822.
- [9] Stokes, G.G. : *On the theory of oscillatory waves*. Camb. Trans. viii 1847.
- [10] Whitham, G.B. : *Linear and Nonlinear waves*. Wiley 1974.
- [11] Skourup, J., Andreasen, K.K. og Hansen, N.E.O. : *Non-Gaussian extreme waves in the central North Sea*. 1996 OMAE, Vol I, part A, Off-shore technology. ASME .
- [12] Longuet-Higgins, M.S. : *On the statistical distribution of the heights of sea waves*. J. of Marine Res. 1952 XI nbr.3 s. 245-266
- [13] Kjeldsen S.P. : *Dangerous wave groups*. Norwegian Maritime Reseach. 1984 **12** s. 4-16.
- [14] Lavrenov, I. : *The wave energy concentration at the Agulhas current of South Africa*. Nat. Hazards 1998 **17** s. 117-127.
- [15] White, B.S. og Fornberg, B. : *On the chance of freak waves at sea*. J.Fluid Mech. **355** 1998 s.113-138.
- [16] Dysthe, K.B. og Trulsen, K. : *Note on breather type solutions of the NLS as model for freak waves*. Phys. Scripta 1999 **T85**, s.48-52.

- [17] Dysthe, K.B. : *Modeling a "rogue wave"-speculation or a realistic possibility?* Proc. Rogue Wave Workshop, Brest 2000.
- [18] Dysthe, K.B. : *Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves.* Proc. R. Soc. Lond. A 1979, **369**, s. 105-114.
- [19] Trulsen, K., Kliakhandler, I., Dysthe K.B. og Velarde, V.G. : *On weakly nonlinear modulation of waves on deep water.* Phys. Fluids 2000, **12**, s. 2432-2437
- [20] Trulsen, K. og Stansberg, C.T. : *Spatial evolution of water surface waves: Numerical simulation and experiment of bichromatic waves.* Proceedings of ISOPE 2001 **3**, s. 71-77
- [21] Alber, I.E. : *The effect of randomness on the stability of two-dimensional surface wave trains.* Proc.Roy.Soc.1978 **A 363** s. 525-546.
- [22] Dysthe, K.B., Socque-Juglard, H., Trulsen, K.og Krogstad, H.: *Evolution of a narrow band spectrum of random surface gravity waves.* J.Fluid Mech. 1003, **478**, s. 1-20.