MAT1300 – Analyse I – 2. februar 2009

For analyse i $R$ spiller delmengder $E \subset R$ på formen $E = (a,b)$ og $E= [a,b]$ ofte en spesiell rolle. Dette er de åpne og de lukkede intervallene. For analyse i $R^m$ er det naturlig å se på delmengder $E \subset R^m$ med tilsvarende egenskaper, nemlig de åpne og de lukkede delmengdene. Det er ikke like lett å beskrive den generelle formen til en åpen, eller en lukket delmengde i $R^m$, men de er karakterisert ved noen relativt enkle egenskaper.

Definisjon:
En delmengde $F \subset R^m$ er lukket hvis hver følge i $F$ som konvergerer i $R^m$ har grense i $F$. Med andre ord, hvis $(x_n)_n$ er en følge i $F$, $x \in R^m$ er en vektor, og $x_n \to x$ når $n \to \infty$, så er $x \in F$.

En følge i en lukket delmengde av $R^m$ kan altså ikke konvergere mot en vektor utenfor den lukkede delmengden.

Lukkede og begrensede delmengder av $R^m$ er karakterisert ved Bolzano-Weierstrass egenskapen. Husk at en delmengde $E \subset R^m$ er begrenset hvis det finnes et tall $M \in R$ slik at $||x|| \le M$ for alle $x \in E$.

Teorem:
La $K \subset R^m$.

(i) Hvis $K$ er lukket og begrenset, så har hver følge i $K$ en delfølge som konvergerer mot et punkt (= en vektor) i $K$.

(ii) Omvendt, hvis hver følge i $K$ har en delfølge som konvergerer mot et punkt i $K$, så er $K$ lukket og begrenset.

Bevis:
(i) Anta at $K$ er lukket og begrenset, og la $(x_n)_n$ være en følge i $K$. Da er $(x_n)_n$ en begrenset følge, siden $K$ er begrenset. Ved Bolzano-Weierstrass egenskapen i $R^m$ finnes det en delfølge $(x_{n(j)})_j$ av $(x_n)_n$, som konvergerer mot en grense $x \in R^m$ når $j \to \infty$. Siden $(x_{n(j)})_j$ er en følge i $K$, og $K$ er lukket, så må denne grensen $x$ ligge i $K$.

(ii) Omvendt, anta at $K$ ikke er lukket. Da finnes en følge $(x_n)_n$ i $K$, og en vektor $x \in R^m \setminus K$, slik at $x_n \to x$ når $n \to \infty$. Enhver delfølge av $(x_n)_n$ vil da også konvergere mot $x \notin K$, så det finnes ingen delfølge av $(x_n)_n$ som konvergerer mot et punkt i $K$.

Anta i stedet at $K$ ikke er begrenset. For hver $n \in N$ finnes da en $x_n \in K$ med $||x|| > n$. La $x \in R^m$ være vilkårlig. Da er

$$||x_n - x|| \ge ||x_n|| - ||x|| > n - ||x||$$

for alle $n$, ved trekantulikheten. For enhver delfølge $(x_{n(j)})_j$ av $(x_n)_n$ vil da ||

$x_{n(j)} - x|| > n(j) - ||x||$ for alle $j$, og dette uttrykket vokser mot uendelig med $j$, så det er umulig at $x_{n(j)} \to x$ når $j \to \infty$. QED.

Definisjon:
En delmengde $U \subset R^m$ er åpen hvis for hvert punkt $x \in U$ finnes en $\epsilon>0$ slik at alle $y \in R^m$ med $||y-x|| < \epsilon$ oppfyller $y \in U$.

Definisjon:
For $x \in R^m$ og $r>0$, la

$$B(x, r) = \{y \in R^m \mid ||y-x|| < r\}$$

være den åpne ballen om $x$ med radius $r$, og la

$$\bar B(x, r) = \{y \in R^m \mid ||y-x|| \le r\}$$

være den lukkede ballen om $x$ med radius $r$.

Lemma:
(i) Den åpne ballen $B(x, r)$ er åpen i $R^m$.

(ii) Den lukkede ballen $\bar B(x, r)$ er lukket i $R^m$.

Bevis:
(i) La $z \in B(x, r)$. Da er $||z-x|| < r$. La $\epsilon = r - ||z-x||$; da er $\epsilon>0$. For alle $y \in R^m$ med $||y-z|| < \epsilon$ er

$$||y-x|| \le ||y-z|| + ||z-x|| < \epsilon + ||z-x|| = r$$

så $y \in B(x, r)$. Altså inneholder $B(x,r)$ en $\epsilon$-ball omkring hvert punkt $z \in B(x, r)$, så $B(x, r)$ er åpen.

(ii) La $(y_n)_n$ være en følge i $\bar B(x, r)$, så $||y_n-x|| \le r$ for hver $n$. Anta at $y_n \to y$ når $n \to \infty$. Da er

$$||y-x|| \le ||y-y_n|| + ||y_n-x|| \le ||y-y_n|| + r \to 0 + r = r$$

når $n \to \infty$. Det følger at $||y-x|| \le r$, så $y \in \bar B(x, r)$. Altså er $\bar B(x, r)$ lukket. QED.

Korollar:
Et lukket intervall $[a,b]$ er en lukket delmengde av $R$. Et åpent intervall $(a,b)$ er en åpen delmengde av $R$.

Bevis: La $x = (a+b)/2$, $r = b-x$. QED.

Lemma:
En delmengde $U \subset R^m$ er åpen hvis og bare hvis for hvert punkt $x \in U$

finnes en $\epsilon>0$ slik at $B(x, \epsilon) \subset U$.  QED.

Definisjon:
La $x \in R^m$ og $N \subset R^m$.  Vi sier at $N$ er en omegn om $x$ i $R^m$ dersom det finnes en $\epsilon>0$ slik at $B(x, \epsilon) \subset N$.

Lemma:
En delmengde $U \subset R^m$ er åpen hvis og bare hvis den er en omegn om hvert av sine punkter.  QED.

Merk at “lukket” ikke betyr det samme som “ikke åpen”, og “åpen” betyr ikke det samme som “ikke lukket”.  Så “åpen” er ikke den logiske negasjonen til “lukket”. For eksempel er det halvåpne intervallet $[a, b)$ hverken åpent eller lukket, for $a < b$. For $[a, b)$ inneholder ingen åpen ball omkring $a$, og det finnes følger i $[a,b)$ som konvergerer mot $b$.  Delmengdene $\emptyset$ og $R$ er begge både åpne og lukkede som delmengder av $R$.

I stedet er åpne og lukkede mengder komplementære som delmengder av $R^m$:

Proposisjon:
En delmengde $E \subset R^m$ er åpen hvis og bare hvis komplementet $R^m \setminus E$ er lukket i $R^m$.  Tilsvarende er $E$ lukket hvis og bare hvis $R^m \setminus E$ er åpen i $R^m$.

Bevis:
Anta at $E$ er åpen.  La $(x_n)_n$ være en følge i $R^m \setminus E$, og anta at $x_n \to x$ når $n \to \infty$.  Vil vise at $x \in R^m \setminus E$.  Anta istedet at $x \in E$.  Siden $E$ er åpen finnes $\epsilon>0$ slik at $B(x, \epsilon) \subset E$.  Siden $x_n \to x$ finnes $n_0 = n_0(\epsilon)$ slik at for alle $n \ge n_0$ er $||x_n-x|| < \epsilon$.  Men da er $x_n \in B(x, \epsilon) \subset E$ for alle $n \ge n_0$, som strider mot at $x_n \in R^m \setminus E$ for alle $n$.

Omvendt, anta at $R^m \setminus E$ er lukket, men at $E$ ikke er åpen.  Da finnes et punkt $x \in E$ slik at $B(x, \epsilon) \not\subset E$ for alle $\epsilon>0$.  Spesielt finnes, for hver $n\in N$, et punkt $x_n \in B(x, 1/n)$ med $x_n \notin E$.  Da er $(x_n)_n$ en følge i $R^m \setminus E$, og $||x-x_n|| < 1/n$, så $x_n \to x$ når $n \to \infty$.  Siden $R^m \setminus E$ er lukket må grensen $x \in R^m \setminus E$, som strider med antagelsen $x \in E$.

Det tilsvarende resultatet følger ved å erstatte $E$ med $R^m \setminus E$, og å bruke at $R^m \setminus (R^m \setminus E)) = E$.  QED.

Lemma:
La $\T$ være samlingen av åpne delmengder i $R^m$.

(i) $\emptyset, R^m \in \T$.

(ii) Hvis $U_j \in \T$ for alle $j \in J$, så er $\bigcup_{j\in J} U_j \in \T$.

(iii) Hvis U_j \in \T for j=1, \dots, n, så er U_1 \cap \dots \cap U_n \in \T.

Bevis:
(i) For å vise at \emptyset er åpen må vi vise at for hver x \in \emptyset er en betingelse oppfylt. Siden det ikke er noen slike x, er dette fort gjort.

For å vise at R^m er åpen, må vi vise at hver x \in R^m har en \epsilon-omegn B(x, \epsilon) som er helt inneholdt i R^m. Her kan vi la \epsilon=1.

(ii) La x \in \bigcup_{j\in J} U_j. Da finnes en i \in J slik at x \in U_i. Siden U_i er åpen finnes en \epsilon>0 slik at B(x, \epsilon) \subset U_i. Da er også B(x, \epsilon) \subset \bigcup_{j\in J} U_j. Dette gjelder for alle x i \bigcup_{j\in J} U_j, så \bigcup_{j\in J} U_j er åpen.

(iii) La x \in U_1 \cap \dots \cap U_n. For hver j=1, \dots, n er x \in U_j, og U_j er åpen, så det finnes en \epsilon_j > 0 med B(x, \epsilon_j) \subset U_j. La \epsilon = \min\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}. Da er \epsilon>0, siden n en endelig. Videre er B(x, \epsilon) \subset B(x, \epsilon_j) \subset U_j for hver j, så B(x, \epsilon) \subset U_1 \cap \dots \cap U_n. Her var x vilkårlig i U_1 \cap \dots \cap U_n, så U_1 \cap \dots \cap U_n er åpen. QED.

En mengde X med en samling \T av delmengder som oppfyller disse tre betingelsene kalles et topologisk rom. Samlingen \T kalles en topologi på X, og elementene i \T, som er delmengder av X, kalles de åpne delmengdene i X (med hensyn på topologien \T).

Lemma:
La \F være samlingen av alle lukkede delmengder i R^m.

(i) \emptyset, R^m \in \F.

(ii) Hvis F_j \in \F for alle j \in J, så er \bigcap_{j\in J} F_j \in \F.

(iii) Hvis F_j \in \F for j=1, \dots, n, så er F_1 \cup \dots \cup F_n \in \F.

Bevis:
(i) \emptyset er lukket i R^m fordi R^m \setminus \emptyset = R^m er åpen i R^m. R^m er lukket i R^m fordi R^m \setminus R^m = \emptyset er åpen i R^m.

(ii) Hver F_j er lukket, så hver R^m \setminus F_j er åpen. Det følger at \bigcap_{j \in J} F_j er lukket, fordi R^m \setminus \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcup_{j \in J} (R^m \setminus F_j) er en union av åpne, som er åpen.

(iii) Hver F_j er lukket, så hver R^m \setminus F_j er åpen. Der følger at F_1 \cup \dots \cup F_n er lukket, fordi R^m \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_n) = (R^m \setminus F_1) \cap \dots \cap (R^m \setminus F_n) er et endelig snitt av åpne, som er åpent. QED.

Eksempel:
En endelig union av lukkede intervaller $[a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_n, b_n]$ er en lukket delmengde av R. En vilkårlig union $\bigcup_j(a_j, b_j)$ av åpne intervaller er en åpen delmengde av R. Alle åpne delmengder av R opptrer på denne måten, men det finnes flere lukkede delmengder i R enn de som er endelige unioner av lukkede intervaller.

Definisjon:
La $E \subset R^m$, la $f \: E \to R^p$ være en funksjon definert på E, og la $x \in E$. Vi sier at f er kontinuerlig i x dersom gitt $\epsilon>0$ finnes det en $\delta = \delta(\epsilon)>0$ slik at for alle $y \in E$ med $||y-x||<\delta$ er $||f(y)-f(x)||<\epsilon$. Hvis f er kontinuerlig i hvert punkt $x \in E$ sier vi at f er kontinuerlig (på E).

Lemma:
La $E \subset R^m$ og $f \: E \to R^p$. La $x \in E$ og anta at f er kontinuerlig i x. La $(x_n)_n$ være en følge i E, med $x_n \to x$ når $n \to \infty$. Da vil $f(x_n) \to f(x)$ når $n \to \infty$.

Bevis: ((ETC))

Lemma:
$f \: R^m \to R^p$ er kontinuerlig hvis og bare hvis $f^{-1}(U)$ er åpen i $R^m$ for hver åpen $U \subset R^p$.

Her er $f^{-1}(U) = \{x \in R^m \mid f(x) \in U\}$ .

Bevis:
Anta f er kontinuerlig og U er åpen. Skal vise at $f^{-1}(U)$ er åpen. La $x \in f^{-1}(U)$. Da er $f(x) \in U$, som er åpen, så det finnes $\epsilon>0$ slik at $B(f(x), \epsilon) \subset U$. Siden f er kontinuerlig finnes $\delta>0$ slik at for alle $y \in B(x, \delta)$ er $f(y) \in B(f(x), \epsilon)$. Altså er $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon) \subset U$, så $B(x, \delta) \subset f^{-1}(U)$. Her var x vilkårlig i $f^{-1}(U)$, så $f^{-1}(U)$ er åpen.

Anta omvendt at $f^{-1}(U)$ er åpen for hver åpen $U \subset R^p$. La $x \in R^m$, og la $\epsilon>0$. Skal finne $\delta>0$ slik at for alle $y \in B(x, \delta)$ er $f(y) \in B(f(x), \epsilon)$. Vet at $B(f(x), \epsilon)$ er åpen i $R^p$, så $f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$ er åpen i $R^m$. Videre er $x \in f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$, så det finnes en $\delta>0$ slik at $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon))$. Da må $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$, som er det vi skulle vise. QED.