MAT1300 – Analyse I – 2. mars 2009

Teorem 7.3 (Lokalt Tayor-teorem):
La $a>0$ og $n\ge1$. Anta at $f \: (-a,a) \to R$ er $(n-1)$ ganger deriverbar (på hele $(-a,a)$), og at $f^{(n)}(0)$ eksisterer. Da er

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \dots + {f^{(n)}(0) \over n!} t^n + \epsilon(t) |t|^n$$

$$= \sum_{j=0}^n {f^{(j)}(0) \over j!} t^j + \epsilon(t) |t|^n$$

der $\epsilon(t) \to 0$ når $t \to 0$.

Teorem 7.2. (Globalt Taylor-teorem):
La $a>0$, $n\ge0$ og $M \in R$. Anta at $f \: (-a,a) \to R$ er n ganger deriverbar (på hele $(-a,a)$), med $|f^{(n)}(t)| \le M$ for alle $t \in (-a,a)$. Da er

$$| f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} {f^{(j)}(0) \over j!} t^j |$$

$$\le M {|t|^n \over n!}$$

for alle $t \in (-a,a)$.

Bevis av Teorem 7.2 og 7.3:
Ser på funksjoner $f, g \: (-a,a) \to R$, der $a>0$. Viser en serie påstander:

Påstand 1: Hvis f og g er deriverbare med

$$f'(t) \le g'(t)$$

for alle $t \in (0,a)$ og $f(0) = g(0)$ så er

$$f(t) \le g(t)$$

for alle $t \in [0,a)$.

Bevis av Påstand 1: La $h(t) = f(t) - g(t)$. Da er h kontinuerlig på $[0,t]$ og deriverbar på $(0,t)$, med $h'(s) = f'(s) - g'(s) \le 0$ for alle $s \in (0,t)$, så ved middelverdisetningen er $h(t) - h(0) \le 0 (t-0) = 0$. Her er $h(0) = f(0) - g(0) = 0$, så $h(t) \le 0$ for alle $t \in [0,a)$, slik at $f(t) \le g(t)$ for alle $t \in [0,a)$.

Påstand 2: La $r\ge0$ og $C \in R$. Hvis

$$|f'(t)| \le C |t|^r$$

for alle $t \in (-a,a)$ og $f(0) = 0$, så er

$$|f(t)| \le C { |t|^{r+1} \over (r+1) }$$

for alle $t \in (-a,a)$.

Bevis av Påstand 2: Ser først på $t \in [0,a)$, og antar at $f'(t) \le C t^r$. La

$$g(t) = C t^{r+1}/(r+1).$$

Da er $g'(t) = C t^r$ og $g(0) = 0$, så ved påstand 1 er

$$f(t) \le C t^{r+1}/(r+1)$$

for alle $t \in [0,a)$. Samme argument med $-f$ i stedet for f, og antagelsen $|f'(t)| \le C t^r$, gir at $|f(t)| \le C t^{r+1}/(r+1)$ for alle $t \in [0,a)$. Samme argument med funksjonen $\bar f(t) = f(-t)$, og antagelsen $|f'(t)| \le C |t|^r$, gir påstanden også for $t \in (-a,0]$.

Påstand 3: La $n\ge0$ og $M \in R$. Hvis g er n ganger deriverbar med

$$|g^{(n)}(t)| \le M$$

for alle $t \in (-a,a)$, og $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$, så er

$$|g(t)| \le M { |t|^n \over n! }$$

for alle $t \in (-a,a)$.

Bevis av Påstand 3, ved induksjon på n. Påstanden er klar for $n=0$. La $n\ge1$ og anta at påstanden holder for $(n-1)$. La g være n ganger deriverbar med $|g^{(n)}(t)| \le M$ for alle $t \in (-a,a)$, slik at $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$. La

$$f(t) = g'(t)$$

for $t \in (-a,a)$. Da er f $(n-1)$ ganger deriverbar, med $|f^{(n-1)}(t)| \le M$ for alle $t \in (-a,a)$, og $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-2)}(0) = 0$. Ved induksjonshypotesen er

$$|f(t)| \le M |t|^{n-1}/((n-1)!)$$

for alle $t \in (-a,a)$. Altså er

$$|g'(t)| \le M |t|^{n-1}/((n-1)!) = C |t|^r$$

for alle $t \in (-a,a)$, med $C = M/((n-1)!)$ og $r = n-1$. Videre er $g(0) = 0$, så ved Påstand 2 er

$$|g(t)| \le C |t|^{r+1}/(r+1) = M |t|^n/(n!)$$

for alle $t \in (-a,a)$. Dette bekrefter påstanden for n, og dermed for alle $n\ge0$ ved induksjon.

Påstand 4: La $n\ge0$. Hvis g er n ganger deriverbar på $(-a,a)$, og $(n+1)$ ganger deriverbar i 0, med

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = g^{(n+1)}(0) = 0,$$

så er

$$|g(t)| \le \eta(t) |t| { |t|^n \over n! }$$

der $\eta(t) \to 0$ når $t \to 0$.

Bevis av Påstand 4: Per antagelse er funksjonen $g^{(n)} \: (-a,a) \to R$ deriverbar i 0, med verdi $g^{(n)}(0)$ og derivert $g^{(n+1)}(0) = 0$. Altså er

$$g^{(n)}(t) = g^{(n)}(0) + g^{(n+1)}(0)t + \epsilon(t) |t|$$

$$= \epsilon(t) |t|$$

der $\epsilon(t) \to 0$ når $t \to 0$. Da finnes en $b \in (0,a)$ slik at $|\epsilon(t)| \le 1$ for alle $t \in [-b,b]$. Da kan vi la

$$\eta(t) = \sup_{s : |s| \le |t|} |\epsilon(s)|$$

for alle $t \in [-b,b]$, og får at $\eta(t) \to 0$ når $t\to 0$. Da vet vi at

$$|g^{(n)}(s)| = |\epsilon(s)| |s| \le \eta(t) |t|$$

for alle $|s| \le |t|$. Ved Påstand 3, med $M = \eta(t) |t|$, er

$$|g(s)| \le M {|s|^n \over n!}$$

for alle $|s|<|t|$. Ved kontinuitet gjelder ulikheten også for $|s|=|t|$. Spesielt er

$$|g(t)| \le M {|t|^n \over n!} = \eta(t) |t| { |t|^n \over n! }$$

der $\eta(t) \to 0$ når $t \to 0$, som skulle vises.

Påstand 5: Hvis f er n ganger deriverbar, med $|f^{(n)}(t)| \le M$ for alle $t \in (-a,a)$, så er

$$| f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} { f^{(j)}(0) \over j! } t^j | \le M { |t|^n \over n! }$$

for alle $t \in (-a,a)$.

Bevis av Påstand 5 og Teorem 7.2: La

$$g(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} { f^{(j)}(0) \over j! } t^j .$$

Da er g n ganger deriverbar, med

$$|g^{(n)}(t)| = |f^{(n)}(t)| \le M$$

for alle $t \in (-a,a)$, og $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0$, så ved Påstand 3 er

$$|g(t)| \le M |t|^n/n!$$

for alle $t \in (-a,a)$, som skulle vises.

Påstand 6: Hvis f er n ganger deriverbar på $(-a,a)$, og $(n+1)$ ganger deriverbar i 0, så er

$$| f(t) - \sum_{j=0}^{n+1} { f^{(j)}(0) \over j! } t^j |$$

$$\le \eta(t) |t|^{n+1}/(n!)$$

der $\eta(t) \to 0$ når $t \to 0$.

Bevis av Påstand 6: La

$$g(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{n+1} { f^{(j)}(0) \over j! } t^j .$$

Da er g n ganger deriverbar på $(-a,a)$ og $(n+1)$ ganger deriverbar i 0, og $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = g^{(n+1)}(0) = 0$, så ved Påstand 4 er

$$|g(t)| \le \eta(t) |t|^{n+1}/n! = (n+1) \eta(t) |t|^{n+1}/(n+1)!)$$

der $\eta(t) \to 0$ når $t \to 0$.

Bevis av Teorem 7.3: Vi setter $\epsilon(t) = (n+1) \eta(t)$ i Påstand 6, og erstatter $n+1$ med n. QED.