MAT1300 – Analyse I – 3. mars 2009

Teorem 7.3 (Lokalt Tayor-teorem): La $a>0$ og $n\ge1$. Anta at $f \: (-a,a) \to R$ er $(n-1)$ ganger deriverbar , og at $f^{(n)}(0)$ eksisterer. Da er

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \dots + {f^{(n)}(0) \over n!} t^n + \epsilon(t) |t|^n$$

$$= \sum_{j=0}^n {f^{(j)}(0) \over j!} t^j + \epsilon(t) |t|^n$$

der $\epsilon(t) \to 0$ når $t \to 0$.

Teorem 7.2. (Globalt Taylor-teorem): La $a>0$, $n\ge0$ og $M \in R$. Anta at $f \: (-a,a) \to R$ er n ganger deriverbar, med $|f^{(n)}(t)| \le M$ for alle $t \in (-a,a)$. Da er

$$| f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} {f^{(j)}(0) \over j!} t^j |$$

$$\le M {|t|^n \over n!}$$

for alle $t \in (-a,a)$.

Anvendelse av Teorem 7.2:
La $e \: R \to R$ være en deriverbar funksjon med $e'(t) = e(t)$ for alle $t \in R$ og $e(0) = 1$. Da er e kontinuerlig på R, og $e^{(j)}(t) = e(t)$ for alle $j\ge0$ og $t \in R$. Spesielt er $e^{(j)}(0) = e(0) = 1$ for alle $j\ge0$. For en gitt $a>0$ er $[-a,a]$ lukket og begrenset, så e er begrenset på $[-a,a]$. Altså finnes en $M = M(a) \in R$ slik at $|e(t)| \le M$ for alle $t \in [-a,a]$. Da er $|e^{(n)}(t)| \le M$ for alle $t \in [-a,a]$, så ved det globale Taylor-teoremet er

$$| e(t) - \sum_{j=0}^{n-1} t^j/j! | \le M |t|^n/n!$$

for alle $t \in (-a,a)$. Her går $M |t|^n/n! \to 0$ når $n \to \infty$, f.eks. siden $M |t|^{n+1}/(n+1)! \le (M/2) |t|^n/n!$ når $n+1 \ge 2|t|$. Så Taylor-rekken

$$\sum_{j=0}^\infty t^j/j!$$

konvergerer mot $e(t)$ for alle $t \in (-a,a)$. Siden a var vilkårlig gjelder dette for alle $t \in R$.

Begrensningene i Teorem 7.3:
La $F(t) = \exp(-1/t^2)$ for $t\ne0$ og $F(0) = 0$. Da er F uendelig mange ganger deriverbar for alle $t \in R$, og $F^{(n)}(0) = 0$ for alle $n\ge0$. For hver $n\ge0$ er altså

$$F(t) = 0 + \epsilon(t) |t|^n$$

der $\epsilon(t) \to 0$ når $t \to 0$. Taylor-rekken til F i 0 er konstant lik 0, men $F(t) = 0$ bare for $t=0$. Taylor-rekken konvergerer altså ikke i noe annet punkt enn $t=0$.

7.2: Lokale Taylor-teoremer i flere variable

Ser nå på Taylor-polynomer for funksjoner $f \: E \to R^p$, der $E \subset R^m$. Antar først $p=1$ og $m=2$, så vi ser på $f \: E \to R$ der $E \subset R^2$.

Lemma: La $E = B(0, \delta) \subset R^2$.
(i) Anta at $f \: E \to R$ har partielle deriverte $f_{,1}$ og $f_{,2}$ med $|f_{,1}(x,y)| \le M$ og $|f_{,2}(x,y)| \le M$ for alle $(x,y) \in E$. Hvis $f(0,0)=0$ så er

$$|f(h,k)| \le M|h| + M|k| \le 2M \sqrt{h^2+k^2} = 2M ||(h,k)||$$

for alle $(h,k) \in E$.

(ii) Anta at $g \: E \to R$ har partielle deriverte $g_{,1}$ og $g_{,2}$ på E, slik at $g_{,1}$ og $g_{,2}$ er kontinuerlige i $0 = (0,0)$, med $g(0,0) = g_{,1}(0,0) = g_{,2}(0,0) = 0$. Da kan vi skrive

$$g(h,k) = \epsilon(h,k) \sqrt{h^2 + k^2} = \epsilon(h,k) ||(h,k)||$$

der $\epsilon(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$.

Bevis:
(i) Siden $|f_{,1}(x, 0)| \le M$ for alle $(x,0) \in E$ gir middelverdiulikheten $|f(h,0) - f(0,0)| \le M |h-0|$, så $|f(h,0)| \le M|h|$. Siden $|f_{,2}(h,y)| \le M$ for alle $(h,y) \in E$ gir middelverdiulikheten $|f(h,k) - f(h,0)| \le M |k-0| = M |k|$. Ved trekantulikheten er

$$|f(h,k)| \le |f(h,0)| + |f(h,k) - f(h,0)| \le M|h| + M|k|.$$

Videre er $|h|, |k| \le ||(h,k)||$, så $|h|+|k| \le 2 ||(h,k)||$.

(ii) La $\epsilon>0$. Ved kontinuitet i 0 finnes $\delta_1 \in (0, \delta)$ slik at $|g_{,1}(x,y)|, |g_{,2}(x,y)| < \epsilon/2$ for alle $(x,y) \in B(0, \delta_1) \subset E$. Ved del (i) er $|g(h,k)| \le \epsilon ||(h,k)||$ når $||(h,k)|| < \delta_1$. Altså er $|\epsilon(h,k)| < \epsilon$ for alle (h,k) med $||(h,k)|| < \delta_1$, så $\epsilon(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$. QED.

Deriverbare funksjoner har partielle deriverte. Under følgende kontinuitetshypotese gjelder også det omvendte.

Teorem 7.10: La $X = (x,y) \in R^2$, $\delta>0$ og $B(X, \delta) \subset E \subset R^2$. Anta at $f \: E \to R$ har partielle deriverte $f_{,1}$ og $f_{,2}$ på $B(X, \delta)$, og at de er kontinuerlige i X. Da kan vi skrive

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_{,1}(x,y)h + f_{,2}(x,y)k + \epsilon(h,k) ||(h,k)||$$

der $\epsilon(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$. Altså er f deriverbar i X.

Bevis:
La

g(h,k) = f(x+h,y+k) - f(x,y) - f_{,1}(x,y)h - f_{,2}(x,y)k
= \epsilon(h,k) ||(h,k)||

for (h,k) \in B(0, \delta). Da oppfyller g hypotesen i del (ii) av lemmaet ovenfor, så det lemmaet viser at \epsilon(h,k) \to 0 når (h,k) \to 0. QED.

Mer generelt har vi:

Teorem 7.11:
(i) La X = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, \delta>0 og B(X, \delta) \subset E \subset R^m. Anta at f \: E \to R har alle partielle deriverte f_{,1}, \dots, f_{,m} på B(X, \delta), og at de er kontinuerlige i X. Da er f deriverbar i X.

(ii) La X = (x_1, \dots, x_m) \in R^m, \delta>0 og B(X, \delta) \subset E \subset R^m. Anta at f \: E \to R^p har alle partielle deriverte f_{i,j} på B(X, \delta), for 1 \le i \le p og 1 \le j \le m, og at de er kontinuerlige i X. Da er f deriverbar i X.

Vender nå mot annen-ordens Taylor-polynomer.

Definisjon: La f_{,ij}(X) = (f_{,j})_{,i}(X), som er det samme som D_{ij}f(X) = D_i(D_j f)(X) og

{\partial^2 f \over \partial x_i \partial x_j}(X) .

Lemma: La E = B(0, \delta) \subset R^2. Anta at g \: E \to R har partielle deriverte g_{,1}, g_{,2}, g_{,11}, g_{,12} og g_{,12} på E, slik at g_{,11}, g_{,12} og g_{,12} er kontinuerlige i 0 = (0,0), med g(0,0) = g_{,1}(0,0) = g_{,2}(0,0) = g_{,11}(0,0) = g_{,12}(0,0) = g_{,22}(0,0) = 0. Da kan vi skrive

g(h,k) = \epsilon(h,k) (h^2 + k^2) = \epsilon(h,k) ||(h,k)||^2

der \epsilon(h,k) \to 0 når (h,k) \to 0.

Bevis: Gitt \epsilon>0 gir kontinuitet av g_{,11}, g_{,12} og g_{,12} i 0 at vi kan finne en \delta_1 \in (0, \delta) slik at

|g_{,11}(x,y)|, |g_{,12}(x,y)|, |g_{,22}(x,y)| \le \epsilon/3

for alle (x,y) \in E_1 = B(0, \delta_1).

Siden |g_{,11}(x,0)| \le \epsilon/3 for alle (x, 0) i E_1, gir middelverdiulikheten for funksjonen g_{,1}(x,0) at |g_{,1}(h,0) - g_{,1}(0,0)| \le \epsilon |h-0| eller

(*) |g_{,1}(h,0)| \le \epsilon |h|

for alle (h,0) \in E_1.

Siden $|g_{,12}(x,0)| \le \epsilon/3$ for alle $(x, 0)$ i E_1, gir middelverdiulikheten for funksjonen $g_{,2}(x,0)$ at $|g_{,2}(h,0) - g_{,2}(0,0)| \le \epsilon |h-0|$ eller

$$|g_{,2}(h,0)| \le \epsilon |h|$$

for alle $(h,0) \in E_1$.

Siden $|g_{,22}(h,y)| \le \epsilon/3$ for alle (h,y) i E_1, gir middelverdiulikheten for funksjonen $g_{,2}(h,y)$ at $|g_{,2}(h,k) - g_{,2}(h,0)| \le \epsilon |k-0|$ eller

$$|g_{,2}(h,k) - g_{,2}(h,0)| \le \epsilon |k|$$

for alle $(h,k) \in E_1$. Ved trekantulikheten er

$$(**) \qquad |g_{,2}(h,k)| \le |g_{,2}(h,0)| + |g_{,2}(h,k) - g_{,2}(h,0)|$$

$$\le \epsilon |h| + \epsilon |k| .$$

Så bruker vi (*) og middelverdiulikheten for funksjonen $g(x,0)$ for x mellom 0 og h, og finner $|g(h,0) - g(0,0)| \le \epsilon |h| |h-0|$, eller

$$|g(h,0)| \le \epsilon |h|^2 .$$

Tilsvarende bruker vi (**) og middelverdiulikheten for funksjonen $g(h,y)$ for y mellom 0 og k, og finner $|g(h,k) - g(h,0)| \le (\epsilon |h| + \epsilon |k|) |k-0|$, eller

$$|g(h,k) - g(h,0)| \le \epsilon (|h| |k| + |k|^2) .$$

Ved trekantulikheten finner vi

$$|g(h,k)| \le |g(h,0)| + |g(h,k) - g(h,0)|$$

$$\le \epsilon |h|^2 + \epsilon (|h| |k| + |k|^2)$$

$$\le 3 \epsilon ||(h,k)||^2 .$$

Her var $\epsilon>0$ vilkårlig, så det følger at $\epsilon(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$. QED.

Teorem 7.12: La $X = (x,y) \in R^2$, $\delta>0$ og $B(X, \delta) \subset E \subset R^2$. Anta at $f \: E \to R$ har partielle deriverte $f_{,1}$, $f_{,2}$, $f_{,11}$, $f_{,12}$ og $f_{,12}$ på $B(X, \delta)$, slik at $f_{,11}$, $f_{,12}$ og $f_{,12}$ er kontinuerlige i X. Da kan vi skrive

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_{,1}(x,y)h + f_{,2}(x,y)k$$

$$+ f_{,11}(x,y)(h^2/2) + f_{,12}(x,y)(hk) + f_{,22}(x,y)(k^2/2)$$

$$+ \epsilon(h,k) ||(h,k)||^2$$

der $\epsilon(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$.

Bevis: La

$$g(h,k) = f(x+h,y+k) - f(x,y) - f_{,1}(x,y)h - f_{,2}(x,y)k$$

$$- f_{,11}(x,y)(h^2/2) - f_{,12}(x,y)(hk) - f_{,22}(x,y)(k^2/2)$$

$$= \epsilon(h,k) ||(h,k)||^2$$

for $(h,k) \in B(0, \delta)$. Da oppfyller g hypotesen i lemmaet ovenfor, så det lemmaet viser at $\epsilon(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$. QED.

Teorem 7.14 (Symmetri av partielle deriverte):
La $X = (x,y) \in R^2$, $\delta>0$ og $B(X, \delta) \subset E \subset R^2$. Anta at $f \: E \to R$ har partielle deriverte $f_{,1}$, $f_{,2}$, $f_{,11}$, $f_{,12}$, $f_{,21}$ og $f_{,22}$ på $B(X, \delta)$, og at de er kontinuerlige i X. Da er $f_{,12}(X) = f_{,21}(X)$.

Bevis:
Ved Teorem 7.12 er

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_{,1}(x,y)h + f_{,2}(x,y)k$$

$$+ f_{,11}(x,y)(h^2/2) + f_{,12}(x,y)(hk) + f_{,22}(x,y)(k^2/2)$$

$$+ \epsilon_1(h,k) ||(h,k)||^2$$

der $\epsilon_1(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$. Ved å bytte om rollen til de to variablene har vi også at

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + f_{,1}(x,y)h + f_{,2}(x,y)k$$

$$+ f_{,11}(x,y)(h^2/2) + f_{,21}(x,y)(hk) + f_{,22}(x,y)(k^2/2)$$

$$+ \epsilon_2(h,k) ||(h,k)||^2$$

der $\epsilon_2(h,k) \to 0$ når $(h,k) \to 0$. Altså er

$$f_{,12}(x,y)(hk) - f_{,21}(x,y)(hk)$$

$$= \epsilon_2(h,k) ||(h,k)||^2 - epsilon_1(h,k) ||(h,k)||^2 .$$

La $k=h$ og del på h^2. Da er

$$f_{,12}(x,y) - f_{,21}(x,y) = 2(\epsilon_2(h,h) - \epsilon_1(h,h)$$

som går mot 0 når $h \to 0$. Altså er $f_{,12}(x,y) = f_{,21}(x,y)$. QED.

Kommentar: Dette resultatet er rimelig. For eksempel, hvis $f(x,y) = x^p y^q$ er $f_{,1}(x,y) = p x^{p-1} y^q$, $f_{,2}(x,y) = q x^p y^{q-1}$ og

$$f_{,12}(x,y) = f_{,21}(x,y) = p q x^{p-1} y^{q-1}.$$

Mer generelt er da $f_{,12} = f_{,21}$ når f er et polynom i x og y. Men dette er ikke et bevis.

Teorem 7.16 (lokalt Taylor-teorem): La $X \in R^m$, $\delta>0$ og $B(X, \delta) \subset E \subset R^m$. Anta at $f = (f_1, \dots, f_p) \: E \to R^p$ har alle partielle deriverte $f_{i,j}$, $f_{i,jk}$, $f_{i,jkl}$, $\dots$ til og med n-te orden på $B(X, \delta)$, for $1 \le i \le p$ og $1 \le j,k,l, \dots \le m$, og at disse er kontinuerlige i X. Da kan vi skrive

$$f_i(X+H) = f_i(X) + \sum_{j=1}^m f_{i,j}(X) h_j$$

$$+ (1/2!) \sum_{j,k=1}^m f_{i,jk}(X) h_j h_k$$

$$+ (1/3!) \sum_{j,k,l=1}^m f_{i,jkl}(X) h_j h_k h_l$$

$$+ \text{(ledd til og med n-te orden)}$$

$$+ \epsilon_i(H) ||H||^n$$

hvor

$$\epsilon(H) \to 0 \text{ når } H \to 0,$$

der $H = (h_1, \dots, h_m)$ og $\epsilon(H) = (\epsilon_1(H), \dots, \epsilon_p(H))$.

I vektorform kan vi skrive formelen ovenfor som

$$f(X+H) = f(X) + Df(X)(H) + \alpha_2(H, H)$$

$$+ \dots + \alpha_n(H, \dots, H) + \epsilon(H) ||H||^n$$

der $\alpha_k \: R^m \times \dots \times R^m \to R^p$ er lineær og symmetrisk.