MAT1300 – Analyse I – 5. mai 2009

13.3. Det inverse funksjonsteoremet

Vi vil bruke kontraksjonsprinsippet for å bevise følgende teorem:

Teorem 13.13 (Det inverse funksjonsteoremet):
La $U \subset R^m$ være åpen, og la $f \: U \to R^m$ være deriverbar med kontinuerlig derivert Df. La $w \in U$ og anta at $Df(w) \: R^m \to R^m$ er invertibel. Da finnes det en åpen $B \subset U \subset R^m$ med $w \in B$, og en åpen $V = f(B) \subset R^m$, slik at

(i) $f|B \: B \to V$ er bijektiv (= invertibel), og

(ii) $g = (f|B)^{-1} \: V \to B \subset R^m$ er deriverbar med $Dg(f(u)) = (Df(u))^{-1} \: R^m \to R^m$ for alle u i B.

Med andre ord, hvis f er kontinuerlig deriverbar og Df er invertibel i w så er f invertibel i en åpen omegn om w, med deriverbar invers $g = f^{-1}$. Den deriverte av inversen $D(f^{-1})$ er lik den inverse av den deriverte $(Df)^{-1}$, evaluert i henholdsvis $f(u)$ og u.

I tilfellet $m=1$ er dette forholdsvis velkjent.

Eksempel: La $h \: U = (e, \infty) \to (1, e) \subset R$ være definert ved $h(x) = y$, der $x^y = y^x$. Vi vet da at $\ln(x)/x = \ln(y)/y$, så om $f \: (1,e) \to (0,1) \subset R$ er gitt ved $f(y) = \ln(y)/y$, med invers $g = f^{-1} \: (0,1) \to (1,e)$, så er $h(x) = g(\ln(x)/x)$ for alle x i (e, ∞). Det inverse funksjonsteoremet forteller oss at g er deriverbar, med derivert $g'(f(y)) = 1/f'(y)$ for y i $(1,e)$. Altså er h deriverbar, med derivert $h'(x) = g'(f(x)) f'(x) = g'(f(y)) f'(x) = f'(x)/f'(y)$ for alle x i (e, ∞).

Lemma 13.2: La $f \: R^m \to R^m$ med $f(0) = 0$. Anta at det finnes en $\delta>0$ og en $0<\eta<1$ slik at

$$||(f(u)-f(v)) - (u-v)|| \le \eta ||u-v||$$

for alle u, v i $\bar B(0, \delta)$. [Spesielt vil da

$$||f(u) - u|| \le \eta ||u||$$

for alle u i $\bar B(0, \delta)$.]

(i) For hver y i $\bar B(0, (1-\eta)\delta)$ finnes det da en og bare en løsning x i $\bar B(0, \delta)$ til likningen

$$f(x) = y .$$

(ii) Hvis vi skriver $x = g(y)$ for denne løsningen, så er

$$||g(y) - y|| \le \eta (1-\eta)^{-1} ||y||.$$

Bevis: (i) La $||y|| \le (1-\eta)\delta$. Vi lar

$$Tx = x + y - f(x)$$

slik at likningen $y = f(x)$ er ekvivalent med fikspunkt-betingelsen $Tx = x$. La $X = \bar B(0, \delta)$ med den Euklidiske metrikken. Da er X lukket i R^m, og derfor komplett. For x i X er $||x|| \le \delta$, så

$$||Tx|| = ||x + y - f(x)||$$

$$\le ||y|| + ||f(x) - x||$$

$$\le ||y|| + \eta||x||$$

$$\le (1-\eta)\delta + \eta\delta = \delta$$

så Tx i X, og $T \: X \to X$. For u, v i X er

$$||Tu - Tv|| = ||u + y - f(u) - v - y + f(v)||$$

$$= ||(f(u)-f(v)) - (u-v)||$$

$$\le \eta ||u-v||$$

så T er en kontraksjonsavbildning. Altså har T et entydig fikspunkt x i X, slik at $Tx = x$, som er ekvivalent med at $y = f(x)$.

(ii) Fikspunktet $x = g(y)$ er grensen av følgen $(T^n y)_n$ i X. Vi har

$$||T^n y - y|| \le \sum_{j=0}^{n-1} ||T^{j+1} y - T^j y||$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1} \eta^j ||Ty - y||$$

$$\le (1-\eta)^{-1} ||Ty - y|| .$$

Når $n \to \infty$ går $T^n y \to x = g(y)$, og siden venstresiden er en kontinuerlig funksjon i $T^n y$ får vi i grensen at

$$||g(y) - y|| \le (1-\eta)^{-1} ||Ty - y||$$

$$= (1-\eta)^{-1} ||y + y - f(y) - y||$$

$$= (1-\eta)^{-1} ||f(y) - y||$$

$$\le \eta(1-\eta)^{-1} ||y|| .$$

QED.

Lemma 13.4: La f \: R^m \to R^m med f(0) = 0. Anta at det finnes en \delta_0>0 slik at f er deriverbar på B(0, \delta_0) \subset R^m. Anta videre at Df er kontinuerlig i 0, og at Df(0) = I (= identitetsavbildningen R^m \to R^m).

(i) Da finnes det en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(0, \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(0, \delta_1) til likningen

    f(x) = y.

(ii) Hvis vi skriver x = g(y) for denne løsningen, så er funksjonen g \: \bar B(0, \rho) \to \bar B(0, \delta_1) \subset R^m deriverbar i 0, med Dg(0) = I.

Bevis: (i) Siden Df er kontinuerlig i 0, og Df = I, kan vi finne en \delta_1>0 slik at \delta_1 < \delta_0 og

    ||Df(w) - I|| < 1/2

for alle w i \bar B(0, \delta_1). Ved middelverdiulikheten for funksjonen h = f - I, gitt ved h(x) = f(x) - x, får vi

    ||(f(u)-f(v)) - (u-v)|| = ||h(u)-h(v)||

        \le ||u-v|| \sup_{||w|| \le \delta_1} ||Dh(w)||

        = ||u-v|| \sup_{||w|| \le \delta_1} ||Df(w)-I||

        \le ||u-v||/2

for alle u, v i \bar B(0, \delta_1). La \rho = \delta_1/2. Ved Lemma 13.2, med \eta=1/2, er det da for hver y i \bar B(0, \rho) en og bare en løsning x i \bar B(0, \delta_1) til likningen f(x) = y.

(ii) Vi skriver x = g(y) for denne løsningen. La \eta>0. Siden Df er kontinuerlig i 0 finnes \delta(\eta)>0, med \delta(\eta)<\delta_1, slik at

    ||Df(w) - I|| < \eta

for alle w i \bar B(0, \delta(\eta)). Ved samme argument som ovenfor får vi at

    ||(f(u)-f(v)) - (u-v)|| \le \eta ||u-v||

for alle u, v i \bar B(0, \delta(\eta)). Ved Lemma 13.2(ii) vil da

    ||g(y)-y|| \le \eta(1-\eta)^{-1} ||y||

for alle y i \bar B(0, (1-\eta)\delta(\eta)). Siden f(0) = 0 er g(0) = 0 og

        g(y) = g(0) + I(y) + \epsilon(y)||y||

der ||\epsilon(y)|| \le \eta(1-\eta)^{-1} for alle y med ||y|| \le (1-\eta)\delta(\eta). Siden \eta>0 var vilkårlig valgt, og \eta(1-\eta)^{-1} \to 0 når \eta \to 0, så betyr dette at ||\epsilon(y)|| \to 0 når y \to 0. Altså er g deriverbar i 0, med Dg(0) = I. QED.

Nå generaliserer vi til tilfellet der Df(0) ikke er identiteten, men invertibel, og deretter til tilfellet der f er definert i en omegn av w i R^m, og Df(w) er invertibel.

Lemma 13.8: La f \: R^m \to R^m med f(0) = 0. Anta at det finnes en \delta_0>0 slik at f er deriverbar på B(0, \delta_0) \subset R^m. Anta videre at Df er kontinuerlig i 0, og at Df(0) er invertibel.

(i) Da finnes det en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(0, \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(0, \delta_1) til likningen

        f(x) = y.

(ii) Hvis vi skriver x = g(y) for denne løsningen, så er funksjonen g \: \bar B(0, \rho) \to \bar B(0, \delta_1) \subset R^m deriverbar i 0, med Dg(0) = Df(0)^{-1}.

Bevis: La \alpha = Df(0), og se på F(x) = \alpha^{-1}f(x). Da er DF(0) = I, så F er lokalt invertibel, med invers G =F^{-1}. La g(y) = G(\alpha^{-1} y). Da er G og g deriverbare i 0, med DG(0) = I og Dg(0) = \alpha^{-1}. Resten er detaljer. QED.

Lemma 13.9: La f \: R^m \to R^m og w i R^m. Anta at det finnes en \delta_0>0 slik at f er deriverbar på B(w, \delta_0) \subset R^m. Anta videre at Df er kontinuerlig i w, og at Df(w) er invertibel.

(i) Da finnes det en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(f(w), \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(w, \delta_1) til likningen

        f(x) = y.

(ii) Hvis vi skriver x = g(y) for denne løsningen, så er funksjonen g \: \bar B(f(w), \rho) \to \bar B(w, \delta_1) \subset R^m deriverbar i 0, med Dg(f(w)) = Df(w)^{-1}.

Bevis: La F(x) = f(x-w) - f(w). Da er F(0) = 0 og DF(0) = Df(w) er invertibel, så F er lokalt invertibel, med invers G = F^{-1}. La g(y) = G(y- f(w)) + w. Da er G og g deriverbare i henholdsvis 0 og f(w), med Dg(f(w)) = DG(0) = DF(0)^{-1} = Df(w)^{-1}. Resten er detaljer. QED.

Vi får et bedre resultat ved å anta at Df er kontinuerlig og invertibel på en åpen mengde U, enn bare i et enkelt punkt w.

Lemma 13.11(iii): La U \subset R^m være åpen og f \: U \to R^m deriverbar. Hvis Df er kontinuerlig på U, og invertibel i et punkt w i U, så finnes det en åpen omegn B \subset U med w i B, slik at Df(u) er invertibel for hver u i U.

Bevis: Determinanten til lineæravbildningen Df(u) \: R^m to R^m er en kontinuerlig funksjon av u, og er ulik 0 for u=w. Altså er den også ulik 0 i en åpen omegn B om w. Da er Df(u) invertibel for alle u i B. QED.

Lemma 13.12: La U \subset R^m være åpen og f \: U \to R^m deriverbar. Hvis Df er kontinuerlig og invertibel i hvert punkt i U, så er f(U) åpen i R^m.

Bevis: La w i U. Siden U er åpen finnes en \delta_0>0 slik at B(w, \delta_0) \subset U. Per antagelse er Df kontinuerlig i w, og Df(w) er invertibel. Ved Lemma 13.9(i) finnes da en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(f(w), \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(w, \delta_1) til likningen f(x) = y. Altså er

\bar B(f(w), \rho) \subset f(\bar B(w, \delta_1)) \subset f(U) .

Dette viser at f(U) er en omegn om hvert av sine punkter, og derfor åpen. QED.

Teorem 13.13 (Det inverse funksjonsteoremet):
La U \subset R^m være åpen, og la f \: U \to R^m være deriverbar med kontinuerlig derivert Df. La w \in U og anta at Df(w) \: R^m \to R^m er invertibel. Da finnes det en åpen B \subset U \subset R^m med w \in B, og en åpen V = f(B) \subset R^m, slik at

(i) den restrikterte funksjonen f|B \: B \to V er bijektiv (= invertibel), og

(ii) den inverse funksjonen g = (f|B)^{-1} \: V \to B \subset R^m er deriverbar med

Dg(f(u)) = (Df(u))^{-1} \: R^m \to R^m

for alle u i B.

Bevis:
(i) Ved Lemma 13.11(iii) finnes en \delta_0>0 slik at B(w, \delta_0) \subset U, og Df(u) er kontinuerlig og invertibel for hver u i B(w, \delta_0).

Ved Lemma 13.9 finnes det da en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(f(w), \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(w, \delta_1) til likningen f(x) = y. La

$$B = \{x \in B(w, \delta_1) : f(x) \in B(f(w), \rho) \}$$

$$= B(w, \delta_1) \cap f^{-1}(B(f(w), \rho))$$

Dette er en åpen delmengde av U, siden f er kontinuerlig. Vi har $f(B) \subset B(f(w), \rho) \subset \bar B(f(w), \rho)$. Det betyr at $f|B$ er injektiv, siden $f(x) = y = f(x')$ med y i $\bar B(f(w), \rho)$ bare har en løsning $x = x'$ i $\bar B(w, \delta_1)$.

La $V = f(B) \subset R^m$. Da V åpen ved Lemma 13.12, og $f|B \: B \to V$ er bijektiv.

(ii) Formelen for $Dg(f(u))$ følger fra Lemma 13.9 anvendt ved u i stedet for w. QED.