MAT1300 – Analyse I – 9. februar 2009

Her er en presisering av middelverdiulikheten. Vi antar $a<b$.

Theorem (Middelverdisetningen):
La $f \: [a, b] \to R$ være en kontinuerlig funksjon som er deriverbar på (a, b).
Da finnes en $c \in (a, b)$ slik at $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Korollar:
La $f \: [a, b] \to R$ være en kontinuerlig funksjon som er deriverbar på (a, b).
Da gjelder:

(i) Hvis $f'(t)>0$ for alle $t \in (a,b)$ så er f strengt voksende på $[a,b]$, dvs. hvis $a \le x < y \le b$ så er $f(x) < f(y)$.

(ii) Hvis $f'(t) \ge 0$ for alle $t \in (a,b)$ så er f voksende på $[a,b]$, dvs. hvis $a \le x \le y \le b$ så er $f(x) \le f(y)$.

(iii) Hvis $f'(t) = 0$ for alle $t \in (a,b)$ så er f konstant på $[a,b]$, dvs. hvis $a \le x \le y \le b$ så er $f(x) = f(y)$.

Bevis av korollaret fra middelverdisetningen:
(i) Ved middelverdisetningen for f på $[x,y]$ er $f(y) – f(x) = f'(c)(y-x)$ for en $c \in (x,y)$.
Her er $f'(c)>0$ og $y>x$, så $f(y) – f(x) = f'(c)(y-x) > 0$ og $f(y) > f(x)$.

(ii) Ved middelverdisetningen for f på $[x,y]$ er $f(y) – f(x) = f'(c)(y-x)$ for en $c \in (x,y)$.
Her er $f'(c) \ge 0$ og $y\ge x$, så $f(y) – f(x) = f'(c)(y-x) \ge 0$ og $f(y) \ge f(x)$.

(iii) Ved middelverdisetningen for f på $[x,y]$ er $f(y) – f(x) = f'(c)(y-x)$ for en $c \in (x,y)$.
Her er $f'(c) = 0$, så $f(y) – f(x) = f'(c)(y-x) = 0$ og $f(y) = f(x)$. QED.

Det er lett å utlede middelverdisetningen fra følgende spesialtilfelle.

Theorem (Rolles teorem):
La $g \: [a, b] \to R$ være en kontinuerlig funksjon som er deriverbar på (a, b).
Hvis $g(a) = g(b)$ så finnes det en $c \in (a, b)$ slik at $f'(c) = 0$.

Bevis av middelverdisetningen fra Rolles teorem:
Gitt $f \: [a, b] \to R$ la $A = (f(b) – f(a))/(b-a)$ og la $g(t) = f(t) – At$. Da er $g(a) = g(b)$, så ved Rolles teorem anvendt på g finnes en $c \in (a, b)$ med $g'(c) = 0$. Da er $f'(c) = A$, som gir middelverdisetningen. QED.

Det gjenstår bare å vise Rolles teorem.

Bevis av Rolles teorem:
Husk at for $c \in (a,b)$ er

$$g'(c) = \lim_{h \to 0} {g(c+h)- g(c) \over h}$$

= \lim_{t \to c} {g(t) – g(c) \over t-c} .

Dersom (x_n)_n er en følge i (a,b) med x_n \ne c, men x_n \to c når n \to \infty, så er

g'(c) = \lim_{n \to \infty} {g(x_n) – g(c) \over x_n – c} .

Dette er klart, siden funksjonen
\cases
{g(t) – g(c) \over t-c} & t \ne c \\
g'(c) & t=c
\endcases
er kontinuerlig i c, og en grensen av en kontinuerlig funksjon anvendt på en konvergent følge er lik funksjonen anvendt på grensen.

Siden g \: [a, b] \to R er kontinuerlig så oppnår den sitt minimum og sitt maksimum (se Theorem 4.46). Altså finnes k_1, k_2 \in [a, b] slik at

g(k_1) \le g(t) \le g(k_2)

for alle t \in [a,b]. Hvis både k_1 og k_2 er endepunkter i [a, b], så er

g(k_1) = g(k_2) = g(a) = g(b)

så g er konstant, og vi kan la c være et vilkårlig punkt i (a,b).

Ellers ligger minst et av punktene k_1 og k_2 i (a,b). Kan anta at dette er k_1. (Tilfellet der k_2 er et indre punkt behandles helt symmetrisk.) La c = k_1 \in (a,b). Skal vise at g'(c) = 0. Det finnes en \delta>0 slik at (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b). La først y_n = c + \delta/n for alle naturlige tall n, slik at y_n – c > 0. Siden k_1 er et minimum for g er g(c) \le g(y_n), så

{g(y_n) – g(c) \over y_n – c} \ge 0

for alle n. I grensen når n \to \infty får vi g'(c) \ge 0. La så x_n = c - \delta/n, slik at x_n – c < 0. Da er g(x_n) \ge g(c), så

{g(x_n) – g(c) \over x_n – c} \le 0

for alle n. I grensen når n \to \infty får vi g'(c) \le 0. Disse to ulikhetene gir g'(c) = 0. QED.