MAT1300 – Analyse I – 9. mars 2009

La x \in B(0, \delta) \subset R^m, og f \: U \to R. Hvis f er deriverbar i x finnes en lineær-avbildning \alpha \: R^m \to R slik at

    f(x+h) = f(x) + \alpha(h) + \epsilon(h) ||h||

der \epsilon(h) \to 0 når h \to 0. Her er

    \alpha(h) = a_1 h_1 + \dots + a_m h_m = A \cdot h

der h = (h_1, \dots, h_m), a_i = \epsilon(e_i) for 1\le i \le m, og A = (a_1, \dots, a_m). Vektoren A = \nabla f kalles ofte **gradienten** til f i x.

Dersom A \ne 0 kan vi la b_1 = A/||A|| og la b_2, \dots, b_m være en ortonormal basis for ortogonal-komplementet til A i R^m. Da er (b_1, b_2, \dots, b_m) en ortonormal basis for R^m, og med hensyn på denne basisen er

    \alpha(h) = a h_1

der a = ||A|| >0.

Dersom A = 0 kan vi la (b_1, b_2, \dots, b_m) være en vilkårlig ortonormal basis, og fortsatt ha samme likhet, nå med a = ||A|| = 0.

I disse koordinatene er altså

    f(x+h) = f(x) + a h_1 + \epsilon(h) ||h||

der h = (h_1, \dots, h_m) og \epsilon(h) \to 0 når h \to 0.

Lemma 7.20:
La U \subset R^m være åpen og f \: U \to R deriverbar i x. Hvis f(x) \ge f(y) for alle y \in U, så er Df(x) = 0 lik null-avbildningen.

Bevis:
Dersom Df(x) \ne 0 er a = ||\nabla f|| > 0 og vi kan skrive

    f(x+h) = f(x) + a h_1 + \epsilon(h) ||h||

der a > 0. Velg \eta>0 slik at for alle ||h|| < \eta er ||\epsilon(h)|| < a/2. Da finnes en h = (h, 0, \dots, 0) med

    f(x+h) = f(x) + ah + \epsilon(h) h > f(x) + ah - ah/2 = f(x) + ah/2 > f(x)

som strider mot f(y) \le f(x) for alle y nær x. QED.

Definisjon: La x \in E \subset R^m og f \: E \to R.

(i) f har et globalt maksimum i x dersom $f(x) \ge f(y)$ for alle $y \in E$.
(ii) f har et strikt globalt maksimum i x dersom $f(x) > f(y)$ for alle $y \ne x$ i E.
(iii) f har et lokalt maksimum i x dersom det finnes en $\delta>0$ slik at f restriktert til $E \cap B(x, \delta)$ har et globalt maksimum i x.
(iv) f har et strikt lokalt maksimum i x dersom det finnes en $\delta>0$ slik at f restriktert til $E \cap B(x, \delta)$ har et strikt globalt maksimum i x.
(v) Hvis det finnes en $\delta>0$ slik at $B(x, \delta) \subset E$, og f er deriverbar i x med $Df(x) = 0$, så kalles x et kritisk punkt for f.

Ethvert lokalt maksimum i det indre av E er altså et kritisk punkt.

Hva er den lokale oppførselen til f nær x når $Df(x) = 0$? Anta at f er to ganger deriverbar nær x, og at de annen-ordens partielle deriverte er kontinuerlige i x. Ved det lokale Taylor-teoremet er

$$f(x+h) = f(x) + \beta(h,h) + \epsilon(h) ||h||^2$$

der

$$\beta(h,h) = (1/2) \sum_{i,j=1}^m f_{,ij}(x) h_i h_j$$

og $\epsilon(h) \to 0$ når $h \to 0$. Vi skriver $\beta = (1/2) D^2f$ og kaller matrisen

$$K = (f_{,ij}(x))_{i,j=1}^m = \left({\partial^2 f \over \partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^m$$

Hesse-matrisen til f i x. Ved Teorem 7.14 er Hesse-matrisen symmetrisk, slik at $f_{,ij}(x) = f_{,ji}(x)$ for alle i, j. Denne matrisen er derfor ortonormalt diagonaliserbar, slik at det finnes en ortonormal basis $(b_1, \dots, b_m)$ for R^m som består av egenvektorer for K. Husk at en egenvektor for K er en vektor b slik at

$$Kb = \lambda b$$

for et tall $\lambda \in R$. Dette tallet kalles egenverdien til K knyttet til b. I koordinatene svarende til denne ortonormale basisen er

$$D^2f(h, h) = \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i^2$$

der $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ er egenverdiene knyttet til disse egenvektorene. Da er

$$f(x+h) = f(x) + (1/2) \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i^2 + \epsilon(h) ||h||^2$$

der $\epsilon(h) \to 0$ når $h \to 0$.

Definisjon:
Vi sier at en symmetrisk matrise K er **positivt definitt** dersom hver

egenverdi λ_i er positiv. Vi sier at K er **negativt definitt** dersom hver egenverdi λ_i er negativ.

Lemma:
La $U \subset R^m$ være åpen og $x \in U$. Anta at f er to ganger deriverbar nær x, og at de annen-ordens partielle deriverte er kontinuerlige i x. Anta at $Df(x) = 0$ og at $D^2f(x)$ er ikke-singulær.

(i) f har et minimum i x hvis og bare hvis $D^2f(x)$ er positivt definitt.
(ii) f har et maksimum i x hvis og bare hvis $D^2f(x)$ er negativt definitt.

Eksempel 7.32:
La $f(x,y) = r \cos(3\theta)$ i polarkoordinater, der $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, eller mer eksplisitt

$$f(x,y) = {y (3x^2-y^2) \over x^2 + y^2}$$

for $(x,y) \ne (0,0)$ og $f(0,0) = (0,0)$.

Vi har $|3x^2 - y^2| \le 3(x^2+y^2)$ så $|f(x,y)| \le 3 |y| \to 0$ når $(x,y) \to 0$. Altså er f kontinuerlig i (0,0).

For en enhetsvektor (u,v) (med $u^2+v^2=1$) er

$$\begin{aligned} f(tu,tv) &= {tv (3(tu)^2 - (tv)^2) \over (tu)^2 + (tv)^2} \\ &= t v (3u^2 - v^2) \end{aligned}$$

slik at

$${f(tu,tv) - f(0,0) \over t} \to v (3u^2 - v^2)$$

når $t \to 0$, slik at f har retningsderiverte i (0,0) i alle retninger (u,v), gitt ved denne formelen.

Merk at for $(u,v) = (1,0)$ og $(u,v) = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ er den retningsderiverte til f lik 0. Dersom f er deriverbar i (0,0) må altså den deriverte $\alpha = Df(0,0) \: R^2 \to R$ være lineær med $\alpha(1,0) = 0$ og $\alpha(-1/2, \sqrt{3}/2) = 0$. Det medfører $\alpha = 0$. Da må den retningsderiverte til f i retningen (0,1) også være $\alpha(0,1) = 0$. Men ved formelen over er den retningsderiverte til f i retningen (0,1) lik $1 (3 \cdot 0^2 - 1^2) = -1$. Denne motsigelsen viser at f ikke er deriverbar i (0,0).