MAT1300 – Analyse I – 10. februar 2009

4.5. Uniform kontinuitet:

Minner om definisjonen av kontinuitet på en mengde.

Definisjon: La $E \subset R^m$. En funksjon $f \: E \to R^p$ er kontinuerlig på E dersom det for hver $x \in E$ og for hver $\epsilon>0$ finnes en $\delta(x, \epsilon)$ slik at for alle $y \in E$ med $||y-x|| < \delta(x, \epsilon)$ så er $||f(y)-f(x)|| < \epsilon$.

Merk at $\delta = \delta(x, \epsilon)$ ikke bare avhenger av ϵ, men også av x. Dersom vi krever at δ skal være uavhengig av x, og bare avhenge av epsilon, får vi definisjonen av et mer restriktivt begrep, som kalles uniform kontinuitet. Her henspeiler order “uniform” på at kravet om hvor nær y må være til x for at $f(y)$ skal være innen ϵ av $f(x)$ er det samme for alle x.

Definisjon: La $E \subset R^m$. En funksjon $f \: E \to R^p$ er uniformt kontinuerlig på E dersom det for hver $\epsilon>0$ finnes en $\delta(\epsilon)>0$ slik at for alle $x, y \in E$ med $||y-x|| < \delta(x, \epsilon)$ så er $||f(y)-f(x)|| < \epsilon$.

Uniformt kontinuerlige funksjoner er alltid kontinuerlige, som vi ser ved å la $\delta(x, \epsilon) = \delta(\epsilon)$ for alle $x \in E$. Den omvendte implikasjonen gjelder ikke alltid.

Eksempel: Følgende funksjoner er kontinuerlige men ikke uniformt kontinuerlige.

(i) $f_1 \: R \to R$ gitt ved $f_1(x) = x^2$.
(ii) $f_2 \: (0,1) \to R$ gitt ved $f_2(x) = 1/x$.
(iii) $f_3 \: (0,1) \to R$ gitt ved $f_3(x) = \sin(1/x)$.

Bevis for (ii):
La $\epsilon = 1$. Dersom f_2 var uniformt kontinuerlig, kunne vi finne en $\delta(1)>0$ slik at for alle $x, y \in (0,1)$ med $|y-x|<\delta(1)$ er $|1/y - 1/x|<1$. Men vi kan finne et naturlig tall n slik at $1/n<\delta(1)$. La så $x=1/(n+2)$ og $y=1/n$. Da er $0<x<y<\delta(1)$, så $|y-x|<\delta(1)$, men $1/x = n+2$ og $1/y = n$, så $|1/x-1/y| = n+2-n =2$, som ikke er mindre enn ϵ. Altså er f_2 ikke uniformt kontinuerlig. QED.

For funksjoner $f \: K \to R^p$ der $K \subset R^m$ er lukket og begrenset, så er kontinuitet ekvivalent med uniform kontinuitet. Dette vil komme til nytte i kapittel 8, når vi viser at kontinuerlige funksjoner er Riemann integrerbare.

Teorem: La $K \subset R^m$ være lukket og begrenset. Hvis $f \: K \to R^p$ er kontinuerlig på K, så er f uniformt kontinuerlig på K.

Bevis:
Anta at f er kontinuerlig men ikke uniformt kontinuerlig. Vi bruker at K har Bolzano-Weierstrass-egenskapen til å finne et punkt $k \in K$ der den manglende uniforme kontinuiteten til f strider med kontinuiteten til f.

Anta altså at f ikke er uniformt kontinuerlig. Da finnes en $\epsilon>0$ slik at for enhver $\delta>0$ finnes det $x, y \in K$ med $||y-x||<\delta$ slik at $||f(y)-f(x)|| \ge \epsilon$. Vi fikserer en slik ϵ, og bruker denne egenskapen for $\delta = 1/n$, for hvert naturlig tall n. Da finnes $x_n, y_n \in K$ med $||y_n-x_n|| < 1/n$ slik at $||f(y_n)-f(x_n)|| \ge \epsilon$.

Se på følgen $(x_n)_n$ i K. Ved Bolzano-Weierstrass-egenskapen har den en konvergent delfølge $(x_{n(j)})_j$ med grense k i K, slik at $x_{n(j)} \to k$ når $j \to \infty$. Ser så på den tilsvarende delfølgen $(y_{n(j)})_j$ av $(y_n)_n$. Ved trekantuilkheten er

$$||y_{n(j)} - k|| \le ||y_{n(j)} - x_{n(j)}|| + ||x_{n(j)} - k|| \to 0+0 = 0$$

når $j \to \infty$, siden $n(j) \to \infty$ og $||y_{n(j)} - x_{n(j)}|| < 1/n(j)$. Altså konvergerer også $(y_{n(j)})_j$ mot k.

Siden f er kontinuerlig i k, vil $f(x_{n(j)}) \to f(k)$ og $f(y_{n(j)}) \to f(k)$ når $j \to \infty$, så

$$||f(y_{n(j)}) - f(x_{n(j)})|| \le ||f(y_{n(j)}) - f(k)|| + ||f(x_{n(j)}) - f(k)|| \to 0+0 = 0$$

når $j \to \infty$. Men per antagelse er

$$\epsilon \le ||f(y_{n(j)}) - f(x_{n(j)})||$$

for alle j, så denne grensen kan ikke være mindre enn ϵ. Dette gir en motsigelse, som viser at f ikke kan være kontinuerlig uten også å være uniformt kontinuerlig (for K lukket og begrenset). QED.