MAT1300 – Analyse I – 11. mai 2009

Vi har brukt kontraksjonsprinsippet for $Tx = x + y - f(x)$ for å bevise:

Lemma 13.2: La $f \: R^m \to R^m$ med $f(0) = 0$. Anta at det finnes en $\delta>0$ og en $0<\eta<1$ slik at

$$||(f(u)-f(v)) - (u-v)|| \le \eta ||u-v||$$

for alle u, v i $\bar B(0, \delta)$. [Spesielt vil da

$$||f(u) - u|| \le \eta ||u||$$

for alle u i $\bar B(0, \delta)$.]

(i) For hver y i $\bar B(0, (1-\eta)\delta)$ finnes det da en og bare en løsning x i $\bar B(0, \delta)$ til likningen

$$f(x) = y .$$

(ii) Hvis vi skriver $x = g(y)$ for denne løsningen, så er

$$||g(y) - y|| \le \eta (1-\eta)^{-1} ||y||.$$

$$\le (1-\eta)^{-1} ||Ty - y|| .$$

Fra dette utledet vi det “punktvise” inverse funksjonsteoremet:

Lemma 13.9: La $f \: R^m \to R^m$ og w i R^m. Anta at det finnes en $\delta_0>0$ slik at f er deriverbar på $B(w, \delta_0) \subset R^m$. Anta videre at Df er kontinuerlig i w, og at $Df(w)$ er invertibel.

(i) Da finnes det en $\delta_1>0$ med $\delta_1 < \delta_0$, og en $\rho>0$, slik at for alle y i $\bar B(f(w), \rho)$ finnes det en og bare en løsning x i $\bar B(w, \delta_1)$ til likningen

$$f(x) = y.$$

(ii) Hvis vi skriver $x = g(y)$ for denne løsningen, så er funksjonen $g \: \bar B(f(w), \rho) \to \bar B(w, \delta_1) \subset R^m$ deriverbar i $f(w)$, med $Dg(f(w)) = Df(w)^{-1}$.

Vi får et bedre resultat ved å anta at Df er kontinuerlig og invertibel på en åpen mengde U, enn bare i et enkelt punkt w.

Lemma 13.11(iii): La U \subset R^m være åpen og f \: U \to R^m deriverbar. Hvis Df er kontinuerlig på U, og invertibel i et punkt w i U, så finnes det en åpen omegn B \subset U med w i B, slik at Df(u) er invertibel for hver u i U.

Bevis: Determinanten til lineæravbildningen Df(u) \: R^m to R^m er en kontinuerlig funksjon av u, og er ulik 0 for u=w. Altså er den også ulik 0 i en åpen omegn B om w. Da er Df(u) invertibel for alle u i B. QED.

Lemma 13.12: La U \subset R^m være åpen og f \: U \to R^m deriverbar. Hvis Df er kontinuerlig og invertibel i hvert punkt i U, så er f(U) åpen i R^m.

Bevis: La w i U. Siden U er åpen finnes en \delta_0>0 slik at B(w, \delta_0) \subset U. Per antagelse er Df kontinuerlig i w, og Df(w) er invertibel. Ved Lemma 13.9(i) finnes da en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(f(w), \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(w, \delta_1) til likningen f(x) = y. Altså er

    \bar B(f(w), \rho) \subset f(\bar B(w, \delta_1)) \subset f(U) .

Dette viser at f(U) er en omegn om hvert av sine punkter, og derfor åpen. QED.

Teorem 13.13 (Det inverse funksjonsteoremet):
La U \subset R^m være åpen, og la f \: U \to R^m være deriverbar med kontinuerlig derivert Df. La w \in U og anta at Df(w) \: R^m \to R^m er invertibel. Da finnes det en åpen B \subset U \subset R^m med w \in B, og en åpen V = f(B) \subset R^m, slik at

(i) den restrikterte funksjonen f|B \: B \to V er bijektiv (= invertibel), og

(ii) den inverse funksjonen g = (f|B)^{-1} \: V \to B \subset R^m er deriverbar med

    Dg(f(u)) = (Df(u))^{-1} \: R^m \to R^m

for alle u i B.

Bevis:
(i) Ved Lemma 13.11(iii) finnes en \delta_0>0 slik at B(w, \delta_0) \subset U, og Df(u) er kontinuerlig og invertibel for hver u i B(w, \delta_0).

Ved Lemma 13.9 finnes det da en \delta_1>0 med \delta_1 < \delta_0, og en \rho>0, slik at for alle y i \bar B(f(w), \rho) finnes det en og bare en løsning x i \bar B(w, \delta_1) til likningen f(x) = y.

U	-f->	R^m
\bar B(w, \delta)	-f|->	f(\bar B(w, \delta_1))
(f|)^{-1}(\bar B(f(w), \rho)	-\cong->	\bar B(f(w), \rho)

$$B \xrightarrow{\cong} V = f(B)$$

La $B = \{x \in B(w, \delta_1) : f(x) \in B(f(w), \rho) \}$

$$= B(w, \delta_1) \cap f^{-1}(B(f(w), \rho)$$

Dette er en åpen delmengde av U, siden f er kontinuerlig.

Vi har $f(B) \subset B(f(w), \rho) \subset \bar B(f(w), \rho)$. Det betyr at $f|B$ er injektiv, siden $f(x) = y = f(x')$ med y i $\bar B(f(w), \rho)$ bare har en løsning $x = x'$ i $\bar B(w, \delta_1)$.

La $V = f(B) \subset R^m$. Da V åpen ved Lemma 13.12, og $f|B \: B \to V$ er bijektiv.

(ii) Formelen for $Dg(f(u))$ følger fra Lemma 13.9 anvendt i punktet u i stedet for w.
QED.