MAT1300 – ANALYSE I – 12. JANUAR 2009

John Rognes

Et kurs i matematisk analyse. Grense-begrepet er sentralt.

For funksjoner $f : E \to \mathbb{R}$, der $E \subset \mathbb{R}$ vil vi studere kontinuitet, derivasjon og integrasjon. Vi vil også arbeide med funksjoner $f : E \to \mathbb{R}^n$ der $E \subset \mathbb{R}^m$.

Disse begrepene antas kjent, men vi vil fokusere på den matematiske strukturen i teorien: Definisjon, Teorem, Bevis, og legge mindre vekt på formelmanipulasjoner og anvendelser.

Mer presist er dette et kurs i reell analyse. Hva er rollen til de reelle tall $\mathbb{R}$ i teorien?

Kan også studere funksjoner $f : E \to \mathbb{Q}$, der $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ er de rasjonale tallene og $E \subset \mathbb{Q}$, og snakke om kontinuitet og derivasjon. Flere velkjente teoremer om funksjoner definert på $\mathbb{R}$ slutter å være gyldige for funksjoner definert på $\mathbb{Q}$. Det må skyldes at bevisene for disse teoremene bruker en eller flere egenskaper ved $\mathbb{R}$ som ikke holder for $\mathbb{Q}$. Uten å ha identifisert disse egenskapene kan vi ikke ha gitt gyldige bevis for disse teoremene.

Teorem 1 (Skjæringssetningen). *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig, la $a < b$ i $\mathbb{R}$, og anta at $f(a) \le 0$ mens $f(b) \ge 0$. Da finnes en $c \in \mathbb{R}$ med $a \le c \le b$ slik at $f(c) = 0$.*

Teorem 2. *La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være deriverbar, med $f'(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Da finnes en konstant $C \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = C$ for alle $x \in \mathbb{R}$.*

Teorem 3. *La $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være deriverbar, med $g'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og la $a < b$. Da er $g(a) < g(b)$.*

Utsagn 1. *La $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være kontinuerlig, la $a < b$ i $\mathbb{Q}$, og anta at $f(a) \le 0$ mens $f(b) \ge 0$. Da finnes en $c \in \mathbb{Q}$ med $a \le c \le b$ slik at $f(c) = 0$.*

Utsagn 2. *La $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være deriverbar, med $f'(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{Q}$. Da finnes en konstant $C \in \mathbb{Q}$ slik at $f(x) = C$ for alle $x \in \mathbb{Q}$.*

Utsagn 3. *La $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være deriverbar, med $g'(x) > 0$ for alle $x \in \mathbb{Q}$, og la $a < b$ i $\mathbb{Q}$. Da er $g(a) < g(b)$.*

Ingen av de tre siste utsagnene er generelt sanne. Det finnes moteksempler. Spesielt kan utsagnene ikke bevises, og de er ikke teoremer.

Eksempel 1. La $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være gitt ved $f(x) = 1$ for $x^2 > 2$ og $f(x) = -1$ for $x^2 < 2$. Da er f kontinuerlig i alle punkter $x \in \mathbb{Q}$. Men $f(1) = -1 \le 0$ og $f(2) = 1 \ge 0$ uten at det finnes noen $c \in \mathbb{Q}$ med $1 \le c \le 2$ og $f(c) = 0$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Eksempel 2. La $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være som i eksempel 1. Da er f deriverbar med $f'(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{Q}$, men det finnes ingen $C \in \mathbb{Q}$ slik at $f(x) = C$ for alle $x \in \mathbb{Q}$.

Eksempel 3. La $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ være gitt ved $g(x) = f(x) + x$. Da er $g'(x) = 1 > 0$ for alle $x \in \mathbb{Q}$, men $g(-2) = -1$ og $g(-1) = -2$, så $g(-2) > g(-1)$.

Definisjon (Grense av en tallfølge). La $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (eller $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$). La $(a_n)_{n=1}^\infty = a_1, a_2, a_3, \dots$ være en følge i $\mathbb{F}$ og la $a \in \mathbb{F}$. Vi sier at

følgen $(a_n)_{n=1}^\infty$ konvergerer mot grensen a når $n \to \infty$

dersom

for hver $\epsilon > 0$ i $\mathbb{F}$ finnes det en $n_0 = n_0(\epsilon)$ i $\mathbb{N}$

(som gjerne avhenger av ϵ) slik at

for alle $n \geq n_0(\epsilon)$ er $|a_n - a| < \epsilon$.

Vi skriver da at $a_n \to a$ når $n \to \infty$.

Vi skriver ofte

$$|a_n - a| < \epsilon \text{ for alle } n \geq n_0(\epsilon)$$

for denne egenskapen. Kan også skrive

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0(\epsilon) \forall n \geq n_0(\epsilon) : |a_n - a| < \epsilon.$$

Ofte skriver vi bare $(a_n)_n$, (a_n) eller a_n for tallfølgen $(a_n)_{n=1}^\infty$.

Lemma. *La $(a_n)_n$ og $(b_n)_n$ være tallfølger i $\mathbb{F}$.*

(1) *Hvis det finnes en $C \in \mathbb{F}$ slik at $a_n = C$ for alle n, så vil $a_n \to C$ når $n \to \infty$.*
(2) *Hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$ når $n \to \infty$ vil $a_n + b_n \to a + b$ når $n \to \infty$.*
(3) *Hvis $a_n \to a$ når $n \to \infty$ og $k \in \mathbb{F}$ så vil $ka_n \to ka$ når $n \to \infty$.*
(4) *Hvis $a_n \to a$ og $b_n \to b$ når $n \to \infty$ vil $a_n b_n \to ab$ når $n \to \infty$.*
(5) *Hvis $a_n \to a$ når $n \to \infty$, $a_n \neq 0$ for alle n og $a \neq 0$, så vil $1/a_n \to 1/a$ når $n \to \infty$.*

Lemma. *La $(a_n)_n$ være en tallfølge i $\mathbb{F}$.*

(1) *Hvis $a_n \to a$ og $a_n \to b$ når $n \to \infty$ så er $a = b$. [Grensen er entydig, hvis den eksisterer.]*
(2) *Hvis det finnes en $A \in \mathbb{F}$ slik at $a_n \leq A$ for alle n, og $a_n \to a$ når $n \to \infty$, så er $a \leq A$.*

Definisjon (Delfølge). Hvis $1 \leq n(1) < n(2) < n(3) < \dots$ er en strengt voksende følge av naturlige tall, så kalles tallfølgen $(a_{n(j)})_{j=1}^\infty = a_{n(1)}, a_{n(2)}, a_{n(3)}$ en delfølge av tallfølgen $(a_n)_{n=1}^\infty = a_1, a_2, a_3, \dots$.

Lemma. *Hvis $a_n \to a$ når $n \to \infty$, og $(a_{n(j)})_j$ er en delfølge av $(a_n)_n$, så vil $a_{n(j)} \to a$ når $j \to \infty$.*

Bveis. Har $n(j) \geq j$ for alle j, så vi kan la $j_0(\epsilon) = n_0(\epsilon)$. $\square$