EKVIVARIANT STABIL HOMOTOPITEORI

JOHN ROGNES

April 1997

Introduksjon til spektra

Spektra representerer generaliserte reduserte kohomologiteorier. Gitt en slik teori $X \mapsto \tilde{E}^n(X)$ finnes det rom E_n med $\tilde{E}^n(X) \cong [X, E_n]$ for alle CW-komplekser X. Suspensjonsisomorfien

$$\sigma_n \colon \tilde{E}^n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}^{n+1}(\Sigma X)$$

gir en naturlig isomorfi

$$[X, E_n] \xrightarrow{\cong} [\Sigma X, E_{n+1}] \cong [X, \Omega E_{n+1}]$$

som er representert av en svak ekvivalens $\tilde{\sigma}_n \colon E_n \to \Omega E_{n+1}$. Man kan anta at hver E_n er homotopiekvivalent med et CW-kompleks og at $\tilde{\sigma}_n$ er en homeomorfi. Det finnes adjungerte avbildninger $\sigma_n \colon \Sigma E_n \to E_{n+1}$. Spekteret $\mathbf{E} = (E_n, \sigma_n)_n$ er følgen av rommene E_n og strukturavbildningene $\sigma_n \colon \Sigma E_n \to E_{n+1}$. Det representerer kohomologiteorien $\tilde{E}^*$ i den forstand at $E^n(X) = [X, E_n]$. Den duale homologiteorien er gitt ved $\tilde{E}_n(X) = \operatorname{colim}_k \pi_{n+k}(E_k \wedge X)$.

Eksempler. Eilenberg-Mac Lane spekteret $\mathbf{H}$ med $H_n = K(\mathbb{Z}, n)$ representerer singulær kohomologi $\tilde{H}^*$ og singulær homologi $\tilde{H}_*$.

Det komplekse topologiske K-teori spekteret $\mathbf{K}U$ med $KU_n = \mathbb{Z} \times BU$ for n jevn og $KU_n = U$ for n odde representerer kompleks topologisk K-teori $\tilde{K}U^*$ og K-homologi $\tilde{K}U_*$. Tilsvarende for reell topologisk K-teori KO.

Sfærespekteret $\mathbf{S}$ med $S_n = Q(S^n) = \operatorname{colim}_k \Omega^k \Sigma^k(S^n)$ representerer stabil kohomotopi π_S^* og stabil homotopi π_*^S.

((Thom spektra.))

Kompleks topologisk K-teori er definert ved

$$K(X) = K\{\text{komplekse vektorbunter } E \to X/\text{isomorfi}\}$$

der K står for gruppekompletering av den Abelske monoiden av slike isomorfiklasser. La G være en kompakt Lie gruppe, og X et G-rom. Det finnes en ekvivariant K-teori $K^G(X)$ som bygges på tilsvarende vis fra komplekse G-vektorbunter $E \to X$. Dette er en slags generalisert ekvivariant kohomologiteori.

La $EG \to BG$ være en prinsipal G-bunt med kontraktibelt totalrom EG. La $c \colon EG \to *$ være kollapsavbildningen.

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Teorem (Atiyah–Segal). *Det er naturlige isomorfier*

$$K(BG) \cong K^G(EG) \xleftarrow[\cong]{c^*} K^G(*)^\wedge_I \cong R(G)^\wedge_I$$

der $R(G)$ er den komplekse representasjonsringen til G, $I \subset R(G)$ er augmentasjonsidealet, og $(?)^\wedge_I$ står for I-adisk komplettering.

For $K^G(*)$ er bygget av komplekse G-vektorbunter over $*$, som er det samme som komplekse G-representasjoner, og representasjonsringen $R(G)$ er gitt ved å gruppekomplettere isomorfiklassene av komplekse G-representasjoner.

Dette resultatet beregner den ikke-ekvivariante K-teorien til rommet BG. Likevel bruker argumentet den G-ekvivariante K-teorien.

Den ekvivariante stabile kategorien

Vi følger Lewis, May og Steinbergers bok [LMS].

Den ekvivariante stabile kategorien $\bar{h}G\mathcal{S}U$ av G-spektra og svake homotopiklasser av G-avbildninger er en komplett og kokomplett lineær kategori, med et symmetrisk monoidalt smashprodukt, og med funksjonsspektra som gjør den til en lukket kartesisk kategori.

Suspensjon og desuspensjon med vilkårlige G-representasjoner induserer selvekvivalenser av kategorien, og alle spektra er direkte grenser av desuspenderte suspenssjonsspektra på endelige G-CW komplekser. For $G = 1$ er kategorien $\bar{h}\mathcal{S}U$ derfor ekvivalent med Boardmans stabile kategori.

Den ekvivariante stabile kategorien kan oppfattes som en triangulert kategori, med enten kofibersekvenser eller fibersekvenser som eksakte triangler. De to strukturene er like, opp til fortegn.

Gitt en gruppehomomorfi $\alpha\colon H \to G$ kan G-spektra oppfattes som H-spektra. Denne tilordningen α^* har både venstre- og høyreadjungerte funktorer; deriblant konstruksjonene av orbit- og fikspunkt-spektra. For $H \subseteq G$ og $\epsilon\colon G \twoheadrightarrow G/N = J$ med N normal er det naturlige isomorfier

$$\begin{aligned} &[G \ltimes_H \mathbf{D}, \mathbf{E}]_G \cong [\mathbf{D}, \mathbf{E}]_H \qquad && [\mathbf{E}, \mathbf{D}]_H \cong [\mathbf{E}, F_H[G, \mathbf{D})]_G \\ &[\mathbf{D}/N, \mathbf{E}]_J \cong [\mathbf{D}, \epsilon^*\mathbf{E}]_G && [\epsilon^*\mathbf{E}, \mathbf{D}]_G \cong [\mathbf{E}, \mathbf{D}^N]_J\,. \end{aligned}$$

I tillegg finnes det to duale adjunksjoner, kjent som Wirthmüller-isomorfien

$$[\Sigma^{-L}\mathbf{E}, \mathbf{D}]_H \cong [\mathbf{E}, G \ltimes_H \mathbf{D}]_G$$

med $L = T_e(G/H)$ den tangentielle H-representasjonen, og den mindre generelle Adams-isomorfien

$$[\mathbf{E}, \mathbf{D}/N]_J \cong [\Sigma^A \epsilon^\# \mathbf{E}, i_*\mathbf{D}]_G$$

med $A = T_e(N)$ den adjungerte G-representasjonen, som gjelder når $\mathbf{D}$ er et N-fritt G-CW spektrum. Når G er endelig er $L = 0$ og $A = 0$. Se Wirthmüller [W] og Adams [A].

§I.1: Ekvivariant homotopiteori

La G være en kompakt Lie gruppe, f.eks. en endelig gruppe.

La $G\mathcal{T}$ være kategorien av kofibrant baserte kompakt genererte svake Hausdorff venstre G-rom; heretter G-rom. G antas å fiksere basispunktet. Morfismene i kategorien er basispunkt-bevarende G-ekvivariante kontinuerlige avbildninger; heretter G-avbildninger.

Gitt G-rom X og Y gis smash-produktet $X \wedge Y$ den diagonale gruppevirkningen $g(x, y) = (gx, gy)$, og funksjonsrommet $F(X, Y)$ den konjugerte gruppevirkningen $(gf)(x) = gf(g^{-1}x)$. Det er en naturlig G-homeomorfi

$$F(X \wedge Y, Z) \cong F(X, F(Y, Z)).$$

For lukkede undergrupper $H \subseteq G$ kan vi danne orbitrommet X/H og fikspunktrommet X^H. Da vil $F(X, Y)^H$ bestå av H-avbildningene $f\colon X \to Y$. Vi skriver også $F_H(X, Y)$ for dette rommet.

Vi danner sylinderen $X \wedge I_+$ og kan snakke om homotopier av avbildninger. Tilsvarende er $CX = X \wedge I$ kjeglen og $\Sigma X = X \wedge S^1$ suspensjonen på X. Dualt har vi frie veirom $F(I_+, X)$, veirom $PX = F(I, X)$ og løkkerom $\Omega X = F(S^1, X)$. Tilsvarende kan vi danne homotopikofibre (avbildningskjegler) og homotopifibre, og gjøre G-ekvivariant homotopiteori. La $hG\mathcal{T}$ være homotopikategorien til $G\mathcal{T}$, med G-rommene som objekter og homotopiklasser av G-avbildninger som morfismer.

For (lukkede) undergrupper $H \subset G$ definerer vi generaliserte G-sfærer ved

$$S^n_H = G/H_+ \wedge S^n = \Sigma^n(G/H_+).$$

Homotopigruppene til X er samlingen av (mengder og) grupper

$$\pi_n^H(X) \cong \pi_n(X^H) = h\mathcal{T}(S^n, X^H) \cong hG\mathcal{T}(S^n_H, X)$$

for $n \geq 0$ og $H \subseteq G$.

Det er adjunksjoner

$$G\mathcal{T}(G_+ \wedge_H X, Y) \cong H\mathcal{T}(X, Y)$$

og

$$H\mathcal{T}(Y, X) \cong G\mathcal{T}(Y, F_H(G_+, X))$$

for $X \in H\mathcal{T}$ og $Y \in G\mathcal{T}$. Hvis X er et G-rom er det naturlige homeomorfier

$$\zeta\colon G_+ \wedge_H X \xrightarrow{\cong} G/H_+ \wedge X$$

gitt ved $\zeta(g, x) = (g, gx)$.

En G-avbildning $f\colon X \to Y$ kalles en svak G-ekvivalens hvis $f_*^H\colon \pi_n^H(X, x) \to \pi_n^H(Y, f(x))$ er en isomorfi for alle $n \geq 0$, $H \subseteq G$ og alle valg av basispunkt $x \in X^H$.

Et basert G-CW kompleks X er unionen av en voksende følge underrom $X^{(n)}$ slik at $X^{(-1)}$ er basispunktet og $X^{(n+1)}$ dannes ved å adjungere celler $G/H_+ \wedge D^{n+1}$ til $X^{(n)}$ over avbildninger $G/H_+ \wedge S^n \to X^{(n)}$.

((G-CW approksimasjon, Whitehead teoremet, triangulering av G-mangfoldigheter.))

§I.2: G-PRESPEKTRA OG G-SPEKTRA

La V være et reelt endelig-dimensjonalt indreprodukt-rom, og la $S^V = V \cup \{\infty\}$ være ettpunktskompaktifiseringen. Hvis G er en ortogonal G-representasjon, dvs. G virker gjennom isometrier på V, så er S^V et basert G-rom, med ∞ som basispunkt.

For $X \in G\mathcal{T}$ la $\Sigma^V X = X \wedge S^V$ og $\Omega^V X = F(S^V, X)$.

Hvis $V, W \subset U$ er ortogonale i et større indreproduktrom skriver vi $V + W$ for deres sum. Hvis $V \subseteq W$ skriver vi $W - V$ for det ortogonale komplementet til V i W. Så $(W - V) + V = W$.

Definisjon. Et reelt indreproduktrom U kalles et G-univers dersom U er en direkte sum av irredusible G-representasjoner, slik at hver irredusibel representasjon forekommer tellbart uendelig mange ganger. Vi antar $\mathbb{R}^\infty \subset U$, med triviell G-virkning. Et G-univers kalles komplett hvis alle irredusible G-representasjoner forekommer i U.

Eksempel. Hvis G er endelig er $U = \mathbb{R}[G]^\infty$ et komplett G-univers.

Heretter vil V, W og Z være endelig-dimensjonale G-representasjoner inneholdt i U.

Definisjon I.2.1. Et G-prespektrum $\mathbf{D}$ indeksert på U består av G-rom $DV = D(V)$ for hver endelig-dimensjonal G-representasjon $V \subset U$, og G-avbildninger

$$\sigma = \sigma_V^W : \Sigma^{W-V} D(V) \to D(W)$$

for alle $V \subseteq W \subset U$, slik at σ_V^V er identiteten og $\sigma_W^Z \circ \Sigma^{Z-W} \sigma_V^W = \sigma_V^Z$ for alle $V \subseteq W \subseteq Z \subset U$. Avbildningene σ kalles strukturavbildningene i prespekteret.

En avbildning $f\colon \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ av G-prespektra består av G-avbildninger $fV = f_V\colon D(V) \to D'(V)$ for alle endelig-dimensjonale $V \subset U$, slik at $\sigma' \circ \Sigma^{W-V} f_V = f_W \circ \sigma$, dvs. avbildningene kommuterer med strukturavbildningene.

Vi skriver $\tilde{\sigma}\colon D(V) \to \Omega^{W-V} D(W)$ for den adjungerte strukturavbildningen. G-avbildninger $\{f_V\}_V$ kommuterer med strukturavbildningene σ hvis og bare hvis de kommuterer med de adjungerte strukturavbildningene $\tilde{\sigma}$.

Definisjon I.2.1. Hvis hver $\tilde{\sigma}$ er en homeomorfi kalles $\mathbf{D}$ et G-spektrum. Kategorien $G\mathcal{S}U$ er en full underkategori

$$G\mathcal{S}U \subset G\mathcal{P}U$$

av kategorien $G\mathcal{P}U$ av G-prespektra.

Teorem I.2.2. *Den glemsomme funktoren*

$$\ell\colon G\mathcal{S}U \to G\mathcal{P}U$$

har en venstreadjungert funktor

$$L\colon G\mathcal{P}U \to G\mathcal{S}U.$$

Dvs. det er naturlige homeomorfier

$$G\mathcal{S}U(L\mathbf{D}, \mathbf{E}) \cong G\mathcal{P}U(\mathbf{D}, \ell\mathbf{E})$$

for $\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ *og* $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$. *Adjunksjonen har en enhet*

$$\eta \colon \mathbf{D} \to \ell L\mathbf{D}$$

og en koenhet

$$\epsilon \colon L\ell\mathbf{E} \xrightarrow{\cong} \mathbf{E}.$$

Koenheten ϵ *er en naturlig isomorfi.*

Spektrifiseringsfunktoren L gir oss derfor en idempotent retraksjon av kategorien av G-prespektra ned på underkategorien av G-spektra. Som høyreadjungert bevarer ℓ alle grenser (som produkt, pullback, equalizer, fikspunktrom), så disse kan dannes romvis i $G\mathcal{P}U$ og definerer derved grensene i $G\mathcal{S}U$. Kogrenser (som sum, pushout, koequalizer, orbitrom) av G-spektra er nesten aldri G-spektra, men som venstreadjungert bevarer L alle kogrenser. Derfor dannes kogrenser i $G\mathcal{S}U$ ved først å konstruere kogrensen romvis i $G\mathcal{P}U$, og så anvende L. Så $G\mathcal{S}U$ har alle grenser og kogrenser.

Definisjon. Det underliggende rommet $\Omega^\infty\mathbf{E}$ til et G-spektrum $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ er $E(0)$. Vi får en funktor

$$\Omega^\infty \colon G\mathcal{S}U \to G\mathcal{T}.$$

Rom i bildet av Ω^∞, eller G-homotopiekvivalente med slike rom, kalles uendelige løkkerom. For hver V er $\Omega^\infty\mathbf{E} = E(0) \cong \Omega^V E(V)$ et V-te løkkerom, derav terminologien.

Suspensjons G-prespekteret til et G-rom X er prespekteret $\{\Sigma^V X\}_V$ med strukturavbildninger

$$\sigma \colon \Sigma^{W-V}\Sigma^V X \cong \Sigma^W X.$$

Suspensjons G-spekteret $\Sigma^\infty X$ er spektrifiseringen $L(\{\Sigma^V X\}_V)$. Vi får en funktor

$$\Sigma^\infty \colon G\mathcal{T} \to G\mathcal{S}U.$$

La $Q(X) = \Omega^\infty\Sigma^\infty X = \operatorname{colim}_V \Omega^V\Sigma^V X$, hvor kogrensen dannes over alle $V \subset U$. Da er $(\Sigma^\infty X)(V) = Q(\Sigma^V X)$ for alle $V \subset U$.

Sfærespekteret er $\mathbf{S} = \Sigma^\infty S^0$, med $S(V) = Q(S^V)$, $\Omega^\infty\mathbf{S} = Q(S^0)$.

Proposisjon I.2.3. Σ^∞ *er venstreadjungert til* Ω^∞, *dvs. det er naturlige homeomorfier*

$$G\mathcal{S}U(\Sigma^\infty X, \mathbf{E}) \cong G\mathcal{T}(X, \Omega^\infty\mathbf{E}).$$

Adjunksjonen har enhet

$$\eta \colon X \to Q(X)$$

og koenhet

$$\epsilon \colon \Sigma^\infty\Omega^\infty\mathbf{E} \to \mathbf{E}.$$

Eksempel. La X og Y være G-rom. Homotopiklasser av G-spektrumsavbildninger $\Sigma^\infty X \to \Sigma^\infty Y$ svarer bijektivt til homotopiklasser av G-avbildninger

$$X \to \Omega^\infty\Sigma^\infty Y = Q(Y),$$

dvs. til $\operatorname{colim}_V[\Sigma^V X, \Sigma^V Y]_G = \{X, Y\}_G$. Dette er homotopiklassene av G-stabile avbildninger fra X til Y.

§A.1: Spektrifiseringsfunktoren L

Alle (pre-)spektra er G-(pre-)spektra i dette avsnittet.

Et prespektrum $\mathbf{D}$ kalles et imbeddingsprespektrum hvis alle de adjungerte strukturavbildningene $\tilde{\sigma}\colon D(V) \to \Omega^{W-V} D(W)$ er imbeddinger. La $G\mathcal{I}U$ være den fulle underkategorien av imbeddingsprespektra. Den glemsomme funktoren ℓ kan faktoriseres som en sammensetning $\ell' \circ \ell''$:

$$G\mathcal{S}U \xrightarrow{\ell''} G\mathcal{I}U \xrightarrow{\ell'} G\mathcal{P}U$$

Vi konstruerer L som sammensetningen $L'' \circ L'$ av venstreadjungerte til henholdsvis ℓ' og ℓ''.

Funktoren $L''\colon G\mathcal{I}U \to G\mathcal{S}U$ er elementær. Gitt et imbeddingsprespektrum $\mathbf{D}$ er spektrifiseringen $\mathbf{E} = L''\mathbf{D} = L\ell'\mathbf{D}$ lik G-spekteret med

$$E(V) = \operatorname*{colim}_{W \supset V} \Omega^{W-V} D(W)$$

der W gjennomløper G-representasjonene i U som inneholder V.

Eksempel. Hvis X er et G-rom er suspensjonsprespekteret $\{\Sigma^V X\}_V$ et imbeddingsprespektrum, så suspensjonsspekteret $\Sigma^\infty X$ er gitt ved

$$(\Sigma^\infty X)(V) = \operatorname*{colim}_{W \supset V} \Omega^{W-V} \Sigma^W X \cong Q(\Sigma^V X).$$

Det gjenstår å konstruere $L'\colon G\mathcal{P}U \to G\mathcal{I}U$ som omdanner et prespektrum til et imbeddingsprespektrum. Vi velger en voksende uttømmende følge av G-representasjoner

$$A_1 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots \subset U$$

slik at $\bigcup_n A_n = U$. Gitt $V \subset U$ finnes det en minste n slik at $V \subset A_n$ (ekte inklusjon).

La $\mathbf{D}$ være et prespektrum. Vi vil danne den maksimale kvotienten av hvert rom $D(V)$ slik at resultatet blir et imbeddingsprespektrum. Dette gjøres ved transfinitt induksjon.

Vi definerer en funktor $J\colon G\mathcal{P}U \to G\mathcal{P}U$ som utfører induksjonstrinnet. Gitt $\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ la $J\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ være prespekteret med

$$JD(V) = \operatorname{im}(D(V) \to \Omega^{A_n - V} D(A_n))$$

der n er minimal slik at $V \subset A_n$. For $V \subseteq W$ vil $\tilde{\sigma}\colon D(V) \to \Omega^{W-V} D(W)$ gi opphav til en avbilding

$$\tilde{\sigma}\colon JD(V) \to \Omega^{W-V} JD(W)$$

og $J\mathbf{D}$ blir et prespektrum. Det er en naturlig avbildning $\gamma\colon \mathbf{D} \to J\mathbf{D}$ som er en romvis surjeksjon.

Vi itererer så J transfinitt. Dvs. for ordinaltall α setter vi $J^{\alpha+1} = J \circ J^\alpha$, og for grenseordinaltall settes $J^\alpha = \operatorname{colim}_{\beta<\alpha} J^\beta$.

For α tilstrekkelig stor (større en kardinaliteten til antall topologier på alle kvotienter av alle rom $D(V)$ for alle $V \subset U$) er så $J^{\alpha+1}\mathbf{D} = J^\alpha \mathbf{D}$, dvs. strukturavbildningene i $J^\alpha\mathbf{D}$ er imbeddinger. Altså er $J^\alpha\mathbf{D}$ et imbeddingsprespektrum, og vi setter $L'\mathbf{D} = J^\alpha\mathbf{D}$.

Teorem (A.1.1 og A.2.1).
(a) $L = L'' \circ L'$ *er venstreadjungert til* $\ell = \ell' \circ \ell''$. *Dermed bevarer* L *kogrenser.*
(b) L *er en kontinuerlig funktor.*
(c) L *bevarer endelige produkter.*

§I.3: Konstruksjonene $E \wedge X$, $F(X, E)$, E/H og E^H; homotopiteori

Definisjon I.3.1. La $\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ og $X \in G\mathcal{T}$. Definer smash-produkt (pre-)spekteret $\mathbf{D} \wedge X \in G\mathcal{P}U$ ved å la

$$(D \wedge X)(V) = D(V) \wedge X$$

for alle $V \subset U$, med strukturavbildninger

$$\Sigma^{W-V}(D(V) \wedge X) \cong (\Sigma^{W-V} D(V)) \wedge X \xrightarrow{\sigma \wedge 1} D(W) \wedge X.$$

(Homeomorfien til venstre er gitt ved en transposisjon.) For $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ la

$$\mathbf{E} \wedge X = L(\ell\mathbf{E} \wedge X).$$

Tilsvarende kan vi definere $X \wedge \mathbf{D}$ og $X \wedge \mathbf{E}$.

Spesielt har vi sylinderen $\mathbf{E} \wedge I_+$, kjeglen $C\mathbf{E} = \mathbf{E} \wedge I$ og suspensjonen $\Sigma E = \mathbf{E} \wedge S^1$ i kategorien av G-spektra. Mer generelt lar vi $\Sigma^V \mathbf{E} = \mathbf{E} \wedge S^V$.

Definisjon I.3.2. Gitt $\mathbf{D}$ i $G\mathcal{P}U$ og X i $G\mathcal{T}$, definer funksjons(pre-)spekteret $F(X, \mathbf{D})$ i $G\mathcal{P}U$ ved å la

$$F(X, D)(V) = F(X, D(V))$$

for alle $V \subset U$, med adjungerte strukturavbildninger

$$F(X, D(V)) \xrightarrow{F(1,\tilde{\sigma})} F(X, \Omega^{W-V} D(W)) \cong \Omega^{W-V} F(X, D(W)).$$

(Homeomorfien til høyre er gitt ved en transposisjon.) Dersom $\mathbf{E}$ er et G-spektrum er $F(X, \mathbf{E})$ allerede et G-spektrum.

Nå får vi det frie veispekteret $F(I_+, \mathbf{E})$, veispekteret $P\mathbf{E} = F(I, \mathbf{E})$ og løkkeromsspekteret $\Omega E = F(S^1, \mathbf{E})$ i kategorien av G-spektra. Mer generelt lar vi $\Omega^V \mathbf{E} = F(S^V, \mathbf{E})$.

Den kontinuerlige adjunksjonen mellom $(?) \wedge X$ og $F(X, (?))$ løftes romvis fra $G\mathcal{T}$ til $G\mathcal{P}U$, og til $G\mathcal{S}U$ gjennom spektrifisering.

Proposisjon I.3.4. *Det er naturlige isomorfier* $\mathbf{E} \wedge S^0 \cong \mathbf{E}$ *og* $F(S^0, \mathbf{E}) \cong \mathbf{E}$.

Vi kan nå snakke om homotopier av avbildninger av G-spektra. La $hG\mathcal{S}U$ være homotopikategorien til $G\mathcal{S}U$, med G-spektra som objekter og homotopiklasser av avbildninger mellom slike som morfismer. Vi kan definere kofibreringer av G-spektra ved homotopi-utvidelsesegenskapen (de blir automatisk lukkede imbeddinger), og fibreringer ved homotopi-løftningsegenskapen. Man kan vise homotopiinvarians av pushout over en kofibrering, og av sekvensielle kogrenser over kofibreringer. Fra dette følge Puppe-sekvensene og lim-R lim-sekvensene. Man kan altså gjøre homotopiteori i kategorien $hG\mathcal{S}U$.

Definisjon. La $H \subseteq G$ være en (lukket) undergruppe. Et univers U kalles H-trivielt hvis H virker som identiteten på alle representasjoner $V \subset U$. Hvis U er et G-univers er underrommet U^H et eksempel på et H-trivielt univers.

Definisjon I.3.7(i). La U være et H-trivielt univers, og la $\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$. La $WH = NH/H$ der $NH \subseteq G$ er normalisatoren til H, og observer at U er et WH-univers.

Definer orbit-spekteret $\mathbf{D}/H$ i $WH\mathcal{P}U$ ved

$$(D/H)(V) = D(V)/H$$

med strukturavbildning

$$\Sigma^{W-V}(D(V)/H) \cong (\Sigma^{W-V} D(V))/H \xrightarrow{\sigma/H} D(W)/H.$$

(Homeomorfien til venstre bruker antagelsen om at H virker trivielt på $W-V \subset U$.) For $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ definerer vi

$$\mathbf{E}/H = L(\ell\mathbf{E}/H) \qquad \in WH\mathcal{S}U.$$

Definer fikspunkt-spekteret $\mathbf{D}^H$ i $WH\mathcal{P}U$ ved

$$(D^H)(V) = D(V)^H$$

med adjungert strukturavbildning

$$D(V)^H \xrightarrow{\tilde{\sigma}^H} (\Omega^{W-V} D(W))^H \cong \Omega^{W-V}(D(W)^H).$$

(Homeomorfien til høyre bruker antagelsen om at H virker trivielt på $W-V \subset U$.) Dersom $\mathbf{E}$ er et G-spektrum er $\mathbf{E}^H$ allerede et WH-spektrum.

La U være et G-univers, og la $i\colon U^H \to U$ være inklusjonen. Ved å restriktere et G-(pre-)spektrum definert på representasjoner $V \subset U$ til de representasjonene som faktisk ligger i U^H får vi definert en funktor

$$i^*\colon G\mathcal{P}U \to G\mathcal{P}U^H,$$

som igjen restrikterer til en funktor

$$i^*\colon G\mathcal{S}U \to G\mathcal{S}U^H.$$

Definisjon I.3.7(ii). La U være et vilkårlig G-univers, og observer at U^H er et H-trivielt WH-univers. For et G-prespektrum $\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ la

$$\mathbf{D}^H = (i^*\mathbf{D})^H \qquad \in WH\mathcal{P}U^H.$$

Dersom $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ er et G-spektrum er $\mathbf{E}^H = (i^*\mathbf{E})^H \in WH\mathcal{S}U^H$ allerede et WH-spektrum.

Vi kan glemme WH-virkningen når den er irrelevant, og få funktorer til $\mathcal{P}U^H$ og $\mathcal{S}U^H$. For $V \subset \mathbb{R}^\infty \subseteq U$ med triviell H-virkning er altså $E^H(V) = E(V)^H$.

Proposisjon I.3.8. *La U være et G-trivielt univers og la $\epsilon^*\colon \mathcal{S}U \to G\mathcal{S}U$ tilordne den trivielle G-virkningen på rommene i et spektrum. Det er adjunksjoner*

$$\mathcal{S}U(\mathbf{E}/G, \mathbf{F}) \cong G\mathcal{S}U(\mathbf{E}, \epsilon^*\mathbf{F})$$

og

$$G\mathcal{S}U(\epsilon^*\mathbf{F}, \mathbf{E}) \cong \mathcal{S}U(\mathbf{F}, \mathbf{E}^G)$$

for $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ og $\mathbf{F} \in \mathcal{S}U$.

§I.4: Funktorene Ω_Z^∞ og Σ_Z^∞; sfærespektra og homotopigrupper

La $Z \subset U$ være en G-representasjon. Da er Z-te-romsfunktoren

$$\Omega_Z^\infty \colon G\mathcal{S}U \to G\mathcal{T}$$

gitt ved $\Omega_Z^\infty \mathbf{E} = E(Z)$. Den har en venstreadjungert

$$\Sigma_Z^\infty \colon G\mathcal{T} \to G\mathcal{S}U,$$

som vi kaller shift-desuspensjon.

Definisjon I.4.1. Gitt et G-rom X la

$$\Sigma_Z^\infty X = L\{\Sigma^{V-Z}X\}_V,$$

der $\{\Sigma^{V-Z}X\}_V$ er G-prespekteret med V-te rom $\Sigma^{V-Z}X$ hvis $V \supseteq Z$, og $*$ ellers. Strukturavbildningene er identiteten eller inklusjonen av basispunktet. L er spektrifiseringsfunktoren. Så

$$(\Sigma_Z^\infty X)(V) \cong Q(\Sigma^{V-Z}X)$$

for $Z \supseteq V$.

Definisjon I.4.3. Definer sfære G-spektra $\mathbf{S}^n \in G\mathcal{S}U$ ved

$$\mathbf{S}^n = \Sigma^\infty S^n$$

og

$$\mathbf{S}^{-n} = \Sigma_n^\infty S^0$$

for $n \geq 0$. For $H \subseteq G$ definer generaliserte sfærespektra $\mathbf{S}_H^n$ for $n \in \mathbb{Z}$ ved

$$\mathbf{S}_H^n = G/H_+ \wedge \mathbf{S}^n.$$

Definisjon I.4.4. (i) For $H \subseteq G$, $n \in \mathbb{Z}$ og $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ la

$$\pi_n^H(\mathbf{E}) = hG\mathcal{S}U(\mathbf{S}_H^n, \mathbf{E}).$$

Disse er Abelske grupper siden $\mathbf{S}_H^n$ er en dobbel suspensjon.

(ii) En avbildning $f \colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ av G-spektra er en svak G-ekvivalens hvis

$$f_* \colon \pi_n^H(\mathbf{E}) \to \pi_n^H(\mathbf{F})$$

er en isomorfi for alle $n \in \mathbb{Z}$, $H \subseteq G$.

(iii) Et spektrum $\mathbf{E}$ er k-sammenhengende hvis $\pi_n^H(\mathbf{E}) = 0$ for alle $n \leq k$ og alle $H \subseteq G$. Det kalles konnektivt hvis det er (-1)-sammenhengende, og nedad begrenset hvis det er k-sammenhengende for noen k.

Proposisjon I.4.5(i, iii). *For $n \geq 0$ er*

$$\pi_n^H(\mathbf{E}) \cong \pi_n^H(E(0)) \cong \pi_n(E(0)^H) \cong \pi_n(\mathbf{E}^H)$$

og

$$\pi_{-n}^H(\mathbf{E}) \cong \pi_0^H(E(\mathbb{R}^n)) \cong \pi_0(E(\mathbb{R}^n)^H) \cong \pi_{-n}(\mathbf{E}^H).$$

Teorem I.4.6. *En avbildning $f \colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ av G-spektra er en svak G-ekvivalens hvis og bare hvis den er en romvis svak G-ekvivalens, dvs. hvis $f_V \colon E(V) \to F(V)$ er en svak G-ekvivalens for alle V. Dersom $\mathbf{E}$ og $\mathbf{F}$ er konnektive holder dette hvis og bare hvis $\Omega^\infty f \colon \Omega^\infty \mathbf{E} \to \Omega^\infty \mathbf{F}$ er en svak G-ekvivalens.*

Dette er lett å vise ikke-ekvivariant (med $G = 1$ triviell), mens det ekvivariante utsagnet er dypere. Dette bevises i §I.7.

§I.5: G-CW SPEKTRA OG DEN STABILE KATEGORIEN

La avbildningskjeglen eller homotopikofiberen være $\mathbf{C}_f = \mathbf{E} \cup_f C\mathbf{D}$ for en avbildning $f\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ av G-spektra. Dette er pushout i diagrammet

$$C\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{D} \xrightarrow{f} \mathbf{E}.$$

Dualt la homotopifiberen være $\mathbf{F}_f = \mathbf{D} \times_f P\mathbf{E}$. Dette er pullback i diagrammet

$$\mathbf{D} \xrightarrow{f} \mathbf{E} \leftarrow P\mathbf{E}.$$

Definisjon I.5.1. Et G-cellespektrum er et G-spektrum $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ med en følge av underspektra $\mathbf{E}_n$ og avbildninger $j_n\colon \mathbf{J}_n \to \mathbf{E}_n$ slik at $\mathbf{E}_0 = *$, hver $\mathbf{J}_n$ er en wedgesum av sfærespektra $\mathbf{S}^q_H$, $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{C}_{j_n} = \mathbf{E}_n \cup_{j_n} C\mathbf{J}_n$ for $n \geq 0$ og $\mathbf{E}$ er unionen av spektrene $\mathbf{E}_n$. Hver avbildning $C\mathbf{S}^q_H \to C\mathbf{J}_n \to \mathbf{E}_{n+1}$ er en $(q+1)$-celle i $\mathbf{E}$.

Et G-CW spektrum er et G-cellespektrum slik at hver pålimingsavbildning $\mathbf{S}^q_H \subseteq \mathbf{J}_n \xrightarrow{j_n} \mathbf{E}_n$ faktoriserer gjennom et celle-underspektrum av $\mathbf{E}_n$ som bare inneholder celler av dimensjon $\leq q$. La n-skjelettet $\mathbf{E}^{(n)} \subseteq \mathbf{E}$ være unionen av cellene i $\mathbf{E}$ av dimensjon $\leq n$. Da er $\mathbf{E} = \bigcup_n \mathbf{E}^{(n)}$. En avbildning $f\colon \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ av G-CW spektra som bevarer skjelettfiltrasjonen kalles cellulær.

La $G\mathcal{C}U \subset G\mathcal{S}U$ være underkategorien av G-CW komplekser og cellulære avbildninger. La $hG\mathcal{C}U$ være dens homotopikategori.

Man kan vise cellulær approksimasjon for avbildninger mellom G-CW spektra (Teorem I.5.8), Whitehead-teoremet at en svak G-ekvivalens mellom G-CW spektra er en G-homotopiekvivalens (Teorem I.5.10), og G-CW approksimasjon av spektra (Teorem I.5.12). Det siste resultatet gir en funktor

$$\Gamma\colon hG\mathcal{S}U \to hG\mathcal{C}U$$

som tar et G-spektrum $\mathbf{E}$ til et G-CW spektrum $\Gamma\mathbf{E}$, sammen med en naturlig svak G-ekvivalens $\gamma\colon \Gamma\mathbf{E} \to \mathbf{E}$ for alle $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$.

Definisjon. La den G-stabile kategorien $\bar{h}G\mathcal{S}U$ være lokaliseringen av homotopikategorien $hG\mathcal{S}U$ med hensyn på de svake G-ekvivalensene. Dvs. $\bar{h}G\mathcal{S}U$ har de samme objektene som $G\mathcal{S}U$ (og $hG\mathcal{S}U$), og i tillegg til morfismene i $hG\mathcal{S}U$ (som er homotopiklasser av morfismer i $G\mathcal{S}U$) innføres formelle inverser til de morfismene i $hG\mathcal{S}U$ som representeres av svake G-ekvivalenser. Dette realiseres ved å la $\bar{h}G\mathcal{S}U$ ha G-spektrene som objekter, og å definere

$$\bar{h}G\mathcal{S}U(\mathbf{D}, \mathbf{E}) = hG\mathcal{S}U(\Gamma\mathbf{D}, \Gamma\mathbf{E})$$

der $\Gamma\mathbf{D}$ og $\Gamma\mathbf{E}$ er G-CW spektra naturlig svakt G-ekvivalente med hhv. $\mathbf{D}$ og $\mathbf{E}$. Vi skriver kort

$$[\mathbf{D}, \mathbf{E}]_G = \bar{h}G\mathcal{S}U(\mathbf{D}, \mathbf{E}).$$

Siden $\mathbf{D}$ er svakt G-ekvivalent med en dobbelt suspensjon er disse morfismemengdene Abelske grupper, og komposisjonen er bilineær, dvs. den G-stabile kategorien $\bar{h}G\mathcal{S}U$ er en lineær kategori.

Morfismene i $\bar{h}G\mathcal{S}U$ kalles også svake G-avbildninger. De kan skrives som en kjede av G-spektrums-avbildninger

$$\mathbf{D} \xleftarrow{\gamma} \Gamma\mathbf{D} \to \Gamma\mathbf{E} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{E}.$$

Siden $hG\mathcal{S}U(\mathbf{S}^n_H, \Gamma\mathbf{E}) \cong hG\mathcal{S}U(\mathbf{S}^n_H, \mathbf{E})$ er ved induksjon $hG\mathcal{S}U(\Gamma\mathbf{D}, \Gamma\mathbf{E}) \cong hG\mathcal{S}U(\Gamma\mathbf{D}, \mathbf{E})$ siden $\Gamma\mathbf{D}$ er et G-CW spektrum. Så hvis $\mathbf{D}$ allerede er et G-CW spektrum er

$$\bar{h}G\mathcal{S}U(\mathbf{D}, \mathbf{E}) \cong hG\mathcal{S}U(\mathbf{D}, \mathbf{E}).$$

Spesielt er

$$\pi^H_n(\mathbf{E}) = [\mathbf{S}^n_H, \mathbf{E}]_G$$

korepresentert i den G-stabile kategorien. γ induserer en ekvivalens av kategorier $\bar{h}G\mathcal{S}U \to hG\mathcal{C}U$.

Teorem I.5.11 (Browns representabilitetsteorem). *En kontravariant funktor*

$$T\colon \bar{h}G\mathcal{S}U \to \mathbf{Sets}$$

kan representeres som

$$T(\mathbf{D}) \cong [\mathbf{D}, \mathbf{E}]_G$$

for et G-spektrum $\mathbf{E}$ hvis og bare hvis (i) T tar wedgesum til produkt, og (ii) T tar homotopipushout til (svakt) pullback.

§I.6: Stabilitet, homologi og kohomologi

Teorem I.6.1. *For alle $V \subset U$ er enheten og koenheten*

$$\eta\colon \mathbf{E} \to \Omega^V\Sigma^V\mathbf{E} \quad og \quad \epsilon\colon \Sigma^V\Omega^V\mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

naturlige isomorfier i $\bar{h}G\mathcal{S}U$. Derfor er Σ^V og Ω^V inverse ekvivalenser. Så det er naturlige isomorfier

$$\Sigma^V : [\mathbf{D}, \mathbf{E}]_G \xrightarrow{\cong} [\Sigma^V\mathbf{D}, \Sigma^V\mathbf{E}]_G$$

og

$$\Omega^V : [\mathbf{D}, \mathbf{E}]_G \xrightarrow{\cong} [\Omega^V\mathbf{D}, \Omega^V\mathbf{E}]_G.$$

Dette bevises i §I.7. Vi kan altså desuspendere med $V \subset U$ i $\bar{h}G\mathcal{S}U$, og skriver også Σ^{-V} for Ω^V.

Et G-spektrum $\mathbf{E}$ representerer $RO(G;U)$-graderte homologi- og kohomologiteorier på G-spektra, og dermed også på G-rom.

For $a = V - W \in RO(G;U)$ der $V, W \subset U$ er endelige summer av distinkte irredusible G-representasjoner i U, la $\mathbf{S}^a = \Sigma^{-W}\mathbf{S}^V = \Omega^W\mathbf{S}^V$. For $a = n \in \mathbb{Z}$ oppfattet som den trivielle representasjonen $\mathbb{R}^n$ er $\mathbf{S}^a = \mathbf{S}^n$. Vi skriver $\Sigma^a\mathbf{E} = \Sigma^{-W}\Sigma^V\mathbf{E}$, og definerer

$$E^G_a(\mathbf{Y}) = [\mathbf{S}^a, \mathbf{Y} \wedge \mathbf{E}]_G \quad \text{og} \quad E^a_G(\mathbf{Y}) = [\mathbf{Y}, \Sigma^a\mathbf{E}]_G$$

for G-spektra Y. (Smashproduktet $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{E}$ defineres i §II.3.) Spesielt for $a = n \in \mathbb{Z}$ er

$$E_n^G(\mathbf{Y}) = \pi_n^G(\mathbf{Y} \wedge \mathbf{E}) \quad \text{og} \quad E_G^n(\mathbf{Y}) = [\mathbf{Y}, \Sigma^n \mathbf{E}]_G.$$

For G-rom X defineres

$$\tilde{E}_a^G(X) = E_a^G(\Sigma^\infty X) = [\mathbf{S}^a, X \wedge \mathbf{E}]_G$$

og

$$\tilde{E}_G^a(X) = E_G^a(\Sigma^\infty X) = [\Sigma^\infty X, \Sigma^a \mathbf{E}]_G.$$

For X et G-CW kompleks er den siste gruppen lik homotopiklassene av G-avbildninger av rom $X \to \Omega^\infty \Sigma^a \mathbf{E}$. Slik representerer spektra homologi- og kohomologiteorier. F.eks. $\pi_n^G(X) = \tilde{S}_n^G(X)$.

§III.2: Linearitet for G-spektra

La $f \colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ være en avbildning av G-spektra. Ved å danne itererte homotopikofibre får vi Puppe kofibersekvenser

$$\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{i} \mathbf{C}_f \xrightarrow{\pi} \Sigma \mathbf{X} \xrightarrow{-\Sigma f} \dots$$

og dualt Puppe fibersekvenser

$$\dots \xrightarrow{-\Omega f} \Omega \mathbf{Y} \xrightarrow{\iota} \mathbf{F}_f \xrightarrow{p} \mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y}.$$

Lemma III.2.1. *Følgende sekvenser er eksakte for alle G-spektra* $\mathbf{Z}$

(i) $$[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]_G \xrightarrow{f_*} [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}]_G \xrightarrow{i_*} [\mathbf{Z}, \mathbf{C}_f]_G$$

(ii) $$[\mathbf{Z}, \mathbf{F}_f]_G \xrightarrow{p_*} [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]_G \xrightarrow{f_*} [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}]_G$$

(iii) $$[\mathbf{X}, \mathbf{Z}]_G \xleftarrow{f^*} [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]_G \xleftarrow{i^*} [\mathbf{C}_f, \mathbf{Z}]_G$$

(iv) $$[\mathbf{F}_f, \mathbf{Z}]_G \xleftarrow{p^*} [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]_G \xleftarrow{f^*} [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]_G.$$

Bevis. Sekvensene (ii) og (iii) er eksakte allerede på romnivået, og er velkjent. Vi viser at (i) er eksakt. Beviset for (iv) er dualt.

Gitt $\alpha \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Y}$ med $i_*(\alpha) = 0$ finnes en utvidelse $\beta \colon C\mathbf{Z} \to \mathbf{C}_f$. Kvotienten gir en avbildning $\gamma \colon \Sigma \mathbf{Z} \to \Sigma \mathbf{X}$ slik at diagrammet kommuterer:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z} \arrow[r, equal] \arrow[d, dotted, "\gamma'"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & C\mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \Sigma \mathbf{Z} \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathbf{X} \arrow[r, "f"] & \mathbf{Y} \arrow[r, "i"] & \mathbf{C}_f \arrow[r, "\pi"] & \Sigma \mathbf{X}
\end{tikzcd}$$

Vi skriver $\gamma = \Sigma \gamma'$ med $\gamma' \colon \mathbf{Z} \to \mathbf{X}$. Da er $f_*(\gamma') = \alpha$, som viser eksakthet. $\square$

((Får lange eksakte sekvenser i homotopi for begge Puppesekvensene.))

Teorem III.2.4. *Det er naturlige isomorfier* $\eta\colon \mathbf{F}_f \to \Omega\mathbf{C}_f$ *og* $\epsilon\colon \Sigma\mathbf{F}_f \to \mathbf{C}_f$ *i den* G*-stabile kategorien* $\bar{h}G\mathcal{S}U$.

Dermed har $\bar{h}G\mathcal{S}U$ to strukturer som triangulert kategori; enten med

$$\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{i} \mathbf{C}_f \xrightarrow{\pi} \Sigma\mathbf{X}$$

eller

$$\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{-\Sigma\iota} \Sigma\mathbf{F}_f \xrightarrow{-\Sigma p} \Sigma\mathbf{X}$$

som eksakte triangler. Disse er negativer av hverandre, dvs. i den G-stabile kategorien er kofibersekvenser og fibersekvenser det samme opp til fortegn.

Spesielt gir både Puppe kofiber- og fiber-sekvensene av G-spektra lange eksakte sekvenser i både $\mathbf{E}$-homologi og $\mathbf{E}$-kohomologi av slike spektra, for ethvert G-spektrum $\mathbf{E}$.

§II.1: Skifte av univers

La U og U' være G-universer, og la $f\colon U \to U'$ være en G-lineær isometri. Da er f nødvendigvis injektiv, og hver irredusibel G-representasjon som forekommer i U forekommer også i U'.

Definisjon II.1.1. Det er en kontravariant skifte-av-univers funktor

$$f^*\colon G\mathcal{P}U' \to G\mathcal{P}U$$

gitt ved $(f^*D')(V) = D'(f(V))$ der $V \subset U$ og $\mathbf{D'} \in G\mathcal{P}U'$. De adjungerte strukturavbildningene er

$$D'(f(V)) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} \Omega^{f(W)-f(V)}D'(f(W)) \xrightarrow[\cong]{F(f,1)} \Omega^{W-V}D'(f(W)).$$

Dersom $\mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U'$ er et G-spektrum er $f^*(\mathbf{E}')$ allerede et G-spektrum.

Det er også en kovariant skifte-av-univers funktor

$$f_*\colon G\mathcal{P}U \to G\mathcal{P}U'$$

gitt ved $(f_*D)(V') = \Sigma^{V'-f(V)}D(V)$ der $V' \subset U'$ og $V = f^{-1}(V') \subset U$, så $f(V) \subseteq V'$. Strukturavbildningene er

$$\Sigma^{W'-V'}\Sigma^{V'-f(V)}D(V) \cong \Sigma^{W'-f(W)}\Sigma^{f(W)-f(V)}D(V) \xrightarrow[\cong]{1\wedge f^{-1}\wedge 1}$$
$$\Sigma^{W'-f(W)}\Sigma^{W-V}D(V) \xrightarrow{\sigma\wedge 1} \Sigma^{W'-f(W)}D(W)$$

der $V' \subseteq W' \subset U'$, $V = f^{-1}(V')$, $W = f^{-1}(W') \subset U$, så $f(V) \subseteq V'$ og $f(W) \subseteq W'$.

For $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ definerer vi $f_*\mathbf{E} = Lf_*(\ell\mathbf{E})$.

Intuitivt kan vi si at f^* glemmer noen av representasjonene vi kan deloope et spektrum med, mens f_* bygger inn nye representasjoner. På prespektrumsnivået gjør f_* dette ved suspensjon med de nye representasjonene i U' som er ortogonale til bildet fra U. På spektrumsnivået følges dette opp med spektrifisering, som typisk også vil forandre de opprinnelige rommene indeksert på representasjoner i U.

Proposisjon II.1.2. *La $f\colon U \to U'$ være en G-lineær isometri. Da er f_* venstreadjungert til f^*, så det er en naturlig homeomorfi*

$$G\mathcal{S}U'(f_*\mathbf{E}, \mathbf{E}') \cong G\mathcal{S}U(\mathbf{E}, f^*\mathbf{E}')$$

der $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ og $\mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U'$. Videre er $(gf)_* = g_*f_*$ og $(gf)^* = f^*g^*$ for $g\colon U' \to U''$.

Hvis det finnes en G-lineær isometri $f\colon U \to U'$, dvs. hvis U' inneholder alle de irredusible representasjonene i U, så er rommet av slike G-lineære isometrier kontraktibelt (Lemma II.1.5). For to slike $f, g\colon U \to U'$ er da de induserte funktorene

$$f_*, g_*\colon \bar{h}G\mathcal{S}U \to \bar{h}G\mathcal{S}U'$$

på de G-stabile kategoriene kanonisk og koherent naturlig ekvivalente. Det samme gjelder f^* og g^*. Derfor er f_* og f^* på en presis måte essensielt uavhengige av valget av den isometriske imbeddingen $U \to U'$.

§II.3: Smash-produkt og funksjons-spektra

La U og U' være G-universer. Da er $U \oplus U'$ igjen et G-univers. Gitt en familie rom $D(V \oplus V')$ og avbildninger $\Sigma^{(W-V)\oplus(W'-V')}D(V \oplus V') \to D(W \oplus W')$ for alle $V \subseteq W \subset U$ og $V' \subseteq W' \subset U'$ utvider vi disse til et prespektrum $\mathbf{D}$ i $G\mathcal{P}(U \oplus U')$ ved

$$D(V'') = \Omega^{V \oplus V' - V''} D(V \oplus V')$$

der $V \oplus V' \supset V''$ er minimalt valgt, for alle $V'' \subset U \oplus U'$. Så $V = \mathrm{proj}_U(V'')$ og $V' = \mathrm{proj}_{U'}(V'')$.

Definisjon II.3.1. For $\mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ og $\mathbf{D}' \in G\mathcal{P}U'$ definer det eksterne smash-produkt-prespekteret

$$\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}' \qquad \in G\mathcal{P}(U \oplus U')$$

ved $(D \wedge D')(V \oplus V') = D(V) \wedge D'(V')$ med strukturavbildninger

$$\Sigma^{(W-V)\oplus(W'-V')} D(V) \wedge D'(V') \cong \\ \Sigma^{W-V} D(V) \wedge \Sigma^{W'-V'} D'(V') \xrightarrow{\sigma\wedge\sigma} D(W) \wedge D'(W').$$

For $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ og $\mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U'$ definer det eksterne smashprodukt-spekteret ved

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}' = L(\ell\mathbf{E} \wedge \ell\mathbf{E}') \qquad \in G\mathcal{S}(U \oplus U').$$

Definisjon II.3.3. Gitt $\mathbf{D}'' \in G\mathcal{P}(U \oplus U')$ og $V \subset U$ definer et prespektrum

$$\mathbf{D}''[V] \qquad \in G\mathcal{P}U'$$

ved $D''[V](V') = D''(V \oplus V')$ med strukturavbildninger

$$\Sigma^{W'-V'} D''(V \oplus V') \xrightarrow{\sigma} D''(V \oplus W').$$

Vi får prespektrumsavbildninger

$$\mathbf{D}''[V] \to \Omega^{W-V}\mathbf{D}''[W]$$

som er isomorfier dersom $\mathbf{D}''$ er et spektrum.

For $\mathbf{D}' \in G\mathcal{P}U'$ definer det eksterne funksjonsprespekteret

$$F(\mathbf{D}', \mathbf{D}'') \qquad \in G\mathcal{P}U$$

ved $F(D', D'')(V) = \mathcal{P}U'(\mathbf{D}', \mathbf{D}''[V])$ med strukturavbildninger

$$\mathcal{P}U'(\mathbf{D}', \mathbf{D}''[V]) \xrightarrow{\tilde{\sigma}_*} \mathcal{P}U'(\mathbf{D}', \Omega^{W-V}\mathbf{D}''[W]) \cong \Omega^{W-V}\mathcal{P}U'(\mathbf{D}', \mathbf{D}''[W]).$$

Dersom $\mathbf{D}''$ er et G-spektrum, så er $F(\mathbf{D}', \mathbf{D}'')$ allerede et G-spektrum.

Proposisjon II.3.4. *Det er naturlige homeomorfier*

$$G\mathcal{P}(U \oplus U')(\mathbf{D} \wedge \mathbf{D}', \mathbf{D}'') \cong G\mathcal{P}U(\mathbf{D}, F(\mathbf{D}', \mathbf{D}''))$$

og

$$G\mathcal{S}(U \oplus U')(\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}', \mathbf{E}'') \cong G\mathcal{S}U(\mathbf{E}, F(\mathbf{E}', \mathbf{E}'')).$$

Det finnes en symmetrisk definisjon av $F(\mathbf{E}, \mathbf{E}'') \in G\mathcal{S}U'$ for $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ og $\mathbf{E}'' \in G\mathcal{S}(U \oplus U')$, og en tilsvarende adjunksjon.

Det eksterne smashproduktet er assosiativt, unitalt og kommutativt opp til koherent isomorfi. F.eks. er $t_*(\mathbf{E}' \wedge \mathbf{E}) \cong \mathbf{E} \wedge \mathbf{E}'$ i $G\mathcal{S}(U \oplus U')$, der $t\colon U' \oplus U \to U \oplus U'$ transponerer faktorene.

Vi internaliserer så smashproduktet og funksjonsspekteret.

Definisjon II.3.11. Velg en G-lineær isometri $f\colon U \oplus U \to U$. Definer interne smashprodukt- og funksjonsspektrum-funktorer

$$G\mathcal{S}U \times G\mathcal{S}U \xrightarrow{\wedge} G\mathcal{S}U \quad \text{og} \quad G\mathcal{S}U \times G\mathcal{S}U \xrightarrow{F(\ ,\ )} G\mathcal{S}U$$

ved $\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}' = f_*(\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}')$ og $F(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = F(\mathbf{E}, f^*\mathbf{E}')$ for $\mathbf{E}, \mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U$.

Spesielt er $\Omega^\infty F(\mathbf{E}, \mathbf{E}') \cong \mathcal{S}U(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$ for $\mathbf{E}, \mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U$, mens $\Omega^\infty F(\mathbf{E}, \mathbf{E}')^G \cong G\mathcal{S}U(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$.

De interne operasjonene bevarer svake ekvivalenser, og induserer derfor smashprodukt- og funksjonsspektra på den G-stabile kategorien $\bar{h}G\mathcal{S}U$. Her er konstruksjonene uavhengige (opp til kanonisk koherent isomorfi) av valget av f.

Teorem II.3.13. *Den G-stabile kategorien $\bar{G}\mathcal{S}U$ er en lukket symmetrisk monoidal kategori, med hensyn på det interne smashproduktet $\wedge$ og funksjonsspekteret $F(\ ,\ )$, med sfærespekteret $\mathbf{S}$ som enhet.*

Dvs. det er en naturlig isomorfi

$$\bar{h}G\mathcal{S}U(\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}', \mathbf{E}'') \cong \bar{h}G\mathcal{S}U(\mathbf{E}, F(\mathbf{E}', \mathbf{E}''))$$

for $\mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{E}'' \in \bar{h}G\mathcal{S}U$, og koherente naturlige isomorfier

$$(\mathbf{E} \wedge \mathbf{E}') \wedge \mathbf{E}'' \cong \mathbf{E} \wedge (\mathbf{E}' \wedge \mathbf{E}'')$$
$$\mathbf{S} \wedge \mathbf{E} \cong \mathbf{E} \cong \mathbf{E} \wedge \mathbf{S}$$
$$\gamma\colon \mathbf{E} \wedge \mathbf{E}' \cong \mathbf{E}' \wedge \mathbf{E}$$

i $\bar{h}G\mathcal{S}U$.

§II.2: N-frie G-spektra lever i N-trivielle universer

Definisjon II.2.1. La $N \subseteq G$ være en normal undergruppe.

Vi kan oppfatte et G-rom som et N-rom ved restriksjon av gruppevirkningen. Et G-rom X kalles N-fritt hvis N virker fritt på X, dvs. $G_x \cap N = 1$ for alle $x \neq *$ der $G_x \subseteq G$ er stabilisatoren til punktet $x \in X$.

Et G-CW spektrum er N-fritt dersom det består av celler på formen $C\mathbf{S}^n_H \cong G/H_+ \wedge C\mathbf{S}^n$ med $H \cap N = 1$.

Vi definerer ikke hva det vil si at et generelt G-spektrum er N-fritt.

Definisjon II.2.5. La $i\colon U' \to U$ være en inklusjon av G-universer. En U'-representasjon av et spektrum $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ er et spektrum $\mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U'$ sammen med en svak G-ekvivalens $i_*\mathbf{E}' \to \mathbf{E}$.

Teorem II.2.8. *La N være en normal undergruppe av G, la U være et komplett G-univers, og la $i\colon U^N \to U$ være inklusjonen.*

(i) Hvis $\mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U^N$ er et N-fritt G-CW spektrum, og $\mathbf{F}' \in G\mathcal{S}U^N$ et G-spektrum, så er

$$i_*\colon [\mathbf{E}', \mathbf{F}']_G \to [i_*\mathbf{E}', i_*\mathbf{F}']_G$$

en isomorfi.

(ii) Hvis $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ er et N-fritt G-CW spektrum så har $\mathbf{E}$ en U^N-representasjon ved et N-fritt G-CW spektrum $\mathbf{E}' \in G\mathcal{S}U^N$. Videre er $\mathbf{E}'$ entydig bestemt opp til G-homotopiekvivalens.

Derfor huskeregelen: "N-frie G-CW spektra lever i N-trivielle universer."

Korollar II.2.9 (Adams). *Hvis X er et N-fritt G-CW kompleks og Y et G-rom, så er $[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y]_G$ det samme om det beregnes i universet U^N eller i U.*

§II.4: Skifte av gruppe; frie og kofrie G-spektra

La $\alpha\colon H \to G$ være en gruppehomomorfi. Et G-univers kan oppfattes som et H-univers ved prekomposisjon med α, og tilsvarende kan G-rom oppfattes som H-rom. Derfor har vi en glemsom funktor

$$\alpha^*\colon G\mathcal{S}U \to H\mathcal{S}U$$

der U oppfattes som et G-univers til venstre og som et H-univers til høyre. Vi skal konstruere venstre- og høyreadjungerte funktorer $G \ltimes_\alpha (?)$ og $F_\alpha[G, (?))$ til α^*.

La $N = \ker(\alpha)$ og $J = \mathrm{im}(\alpha)$. Da kan α faktoriseres som en surjeksjon og en injeksjon

$$H \twoheadrightarrow H/N \cong J \rightarrowtail G.$$

Det er derfor nok å konstruere adjungerte funktorer i tilfellene hvor $\alpha\colon H \rightarrowtail G$ er inklusjonen av en undergruppe, og hvor $\epsilon\colon G \twoheadrightarrow G/N = J$ er surjeksjonen på en kvotientgruppe.

Definisjon II.4.1. La H være en undergruppe av G, og la $\mathbf{D} \in H\mathcal{P}U$, der U er et G-univers.

(i) Definer $G \ltimes_H \mathbf{D} \in G\mathcal{P}U$ ved

$$(G \ltimes_H D)(V) = G_+ \wedge_H D(V)$$

med strukturavbildninger

$$(G_+ \wedge_H D(V)) \wedge S^{W-V} \xrightarrow[\cong]{\zeta^{-1}} G_+ \wedge_H (D(V) \wedge S^{W-V}) \xrightarrow{1\wedge\sigma} G_+ \wedge_H D(W).$$

(Homeomorfien til venstre tvister inn gruppevirkningen av H på G-representasjonen $W - V$.) For $\mathbf{E} \in H\mathcal{S}U$ definerer vi

$$G \ltimes_H \mathbf{E} = L(G \ltimes_H \ell\mathbf{E}).$$

(ii) Definer $F_H[G, \mathbf{D}) \in G\mathcal{P}U$ ved

$$F_H[G, D)(V) = F_H(G_+, D(V))$$

med adjungerte strukturavbildninger

$$F_H(G_+, D(V)) \xrightarrow{F(1,\tilde{\sigma})} F_H(G_+, \Omega^{W-V} D(W)) \xrightarrow[\cong]{} \Omega^{W-V} F_H(G_+, D(W)).$$

(Homeomorfien til høyre tvister H-virkningen vekk fra G-representasjonen $W - V$.) Dersom $\mathbf{E}$ er et H-spektrum, så er $F_H[G, \mathbf{E})$ allerede et G-spektrum.

La U være et G-univers, la $\mathbf{D}$ være et H-spektrum, og la $\mathbf{E}$ være et G-spektrum. Vi tenker på $G \ltimes_H \mathbf{E}$ som det frie G-spekteret, og $F_H[G, \mathbf{E})$ som det kofrie G-spekteret, generert av H-spekteret $\mathbf{E}$.

Proposisjon II.4.3. *For $H \subseteq G$ er det naturlige isomorfier*

$$G\mathcal{S}U(G \ltimes_H \mathbf{D}, \mathbf{E}) \cong H\mathcal{S}U(\mathbf{D}, \mathbf{E})$$

og

$$H\mathcal{S}U(\mathbf{E}, \mathbf{D}) \cong G\mathcal{S}U(\mathbf{E}, F_H[G, \mathbf{D}))$$

der $\mathbf{E} \in G\mathcal{S}U$ kan oppfattes som et H-spektrum ved restriksjon over $H \subseteq G$.

Ved å passere til den stabile kategorien gir dette et utsagn om representerte kohomologiteorier.

Korollar.

$$E^*_G(G \ltimes_H \mathbf{D}) \cong E^*_H(\mathbf{D})$$

for G-spektra $\mathbf{E}$ og H-spektra $\mathbf{D}$.

La så $\epsilon\colon G \twoheadrightarrow G/N = J$ være en surjeksjon med kjerne N. La U være et J-univers, slik at ϵ^*U er et N-trivielt G-univers. Orbit-konstruksjonen $(?)/N$ og fikspunkt-konstruksjonen $(?)^N$ er hhv. venstre- og høyreadjungert til funktoren ϵ^* som oppfatter J-spektra som G-spektra.

Proposition II.4.4. *For $\epsilon\colon G \twoheadrightarrow G/N = J$ er det naturlige isomorfier*

$$J\mathcal{S}U(\mathbf{D}/N, \mathbf{E}) \cong G\mathcal{S}U(\mathbf{D}, \epsilon^*\mathbf{E})$$

og

$$G\mathcal{S}U(\epsilon^*\mathbf{E}, \mathbf{D}) \cong J\mathcal{S}U(\mathbf{E}, \mathbf{D}^N)$$

der $\mathbf{D} \in G\mathcal{S}U$ oppfattes som et G-spektrum indeksert på et N-trivielt univers, og $\mathbf{E} \in J\mathcal{S}U$.

Settes disse resultatene sammen får vi at for en vilkårlig homomorfi $\alpha\colon H \to G$ er $G \ltimes_\alpha \mathbf{D} = G \ltimes_J (\mathbf{D}/N)$ venstreadjungert til α^*, og $F_\alpha[G, \mathbf{D}) = F_J[G, \mathbf{D}^N)$ er høyreadjungert til α^*. Transitivitetsegenskaper til disse funktorene m.h.p. videre homomorfier $\beta\colon G \to K$ uttrykkes best ved disse sammensatte funktorene.

I den G-stabile kategorien er følgende sammenstilling av Teorem II.2.8 med Proposisjon II.4.4 nyttig.

Teorem II.4.5. *La $J = G/N$ med kvotientavbildning $\epsilon\colon G \twoheadrightarrow N$. La G være et komplett G-univers med inklusjon $i\colon U^N \to U$. Hvis $\mathbf{D} \in G\mathcal{S}U^N$ er et N-fritt G-CW spektrum og $\mathbf{E} \in J\mathcal{S}U^N$, så er det naturlige isomorfier*

$$[\mathbf{D}/N, \mathbf{E}]_J \cong [\mathbf{D}, \epsilon^*\mathbf{E}]_G \cong [i_*\mathbf{D}, \epsilon^\#\mathbf{E}]_G$$

der $\epsilon^\#\mathbf{E} = i_*\epsilon^*\mathbf{E}$.

Korollar (Adams). *La U være et komplett G-univers. Hvis X er et N-fritt G-CW kompleks og Y et J-rom så er*

$$[\Sigma^\infty X/N, \Sigma^\infty Y]_J \cong [\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty \epsilon^* Y]_G$$

der venstresiden beregnes i universet U^N og høyresiden i universet U.

§II.5: Pontryagin-Thom konstruksjonen

La $H \subseteq G$ være en (lukket) undergruppe. La $L = T_e(G/H)$ være tangentrommet til G/H i $e = eH$. Da er L en H-representasjon.

Konstruksjon II.5.1. La $j\colon G/H \to V$ være en G-imbedding av G/H i en G-representasjon V. Inklusjonen av tangentrommet i $e = eH$ gir en imbedding av L som en H-underrepresentasjon av V. La $W = V - L$ være det ortogonale komplementet til L, så $V = L + W$ som en H-representasjon. Normalbunten til imbeddingen j er $G \times_H W \to G/H$, så vi kan utvide j til en G-imbedding $\tilde{\jmath}\colon G \times_H W \to V$ av en normal tubulær omegn. Ved å kollapse komplementet av den åpne tubulære omegnen til basispunktet fås en G-avbildning

$$t\colon S^V \to G_+ \wedge_H S^W.$$

Det finnes også en H-avbildning

$$u\colon G_+ \wedge_H S^W \to S^V$$

slik at sammensetningen $u \circ t\colon S^V \to S^V$ er H-homotop med identiteten.

Eksempel. Hvis G er endelig er $L = 0$ og $V = W$. Vi kan la $V = \mathbb{R}[G/H]$ og imbedde G/H på basisvektorene til V. Vi får en G-avbildning

$$t\colon S^V \to G_+ \wedge_H S^V \cong G/H_+ \wedge S^V \cong \bigvee_{G/H} S^V.$$

og en H-avbildning

$$u\colon G/H_+ \wedge S^V \to S^V.$$

Her er u projeksjonen på wedgesummanden til $e = eH \in G/H$. Siden t er en G-avbildning er t sammensatt med projeksjon på hver av wedgesummandene i $G/H_+ \wedge S^V$ en selvavbildning av S^V av grad 1. På homologi sender derfor t generatoren i $\tilde{H}_*(S^V) \cong \mathbb{Z}$ til norm-elementet $N = \sum_{gH \in G/H} gH$ i $\tilde{H}_*(G/H_+ \wedge S^V) \cong \mathbb{Z}[G/H]$.

§II.6: Wirthmüller-isomorfien

Wirthmüller-isomorfien uttrykker en sammenheng mellom funktorene $G \ltimes_H (?)$ og $F_H[G,(?))$ fra H-spektra til G-spektra.

La U være et G-univers slik at alle orbiter G/H imbedder i U. Velg en imbedding $j\colon G/H \to V$ med $V \subset U$, som i II.5.1. Med $L = T_e(G/H)$ og $W = V - L$ er $S^V = S^L \wedge S^W$. Koenheten til den andre adjunksjonen i II.4.3 er en H-avbildning

$$\epsilon\colon F_H[G,\mathbf{D}) \to \mathbf{D}.$$

Definisjon II.6.1. La $\mathbf{D}$ være et H-spektrum. Dann sammensetningen av G-spektrumsavbildninger

$$F_H[G,\Sigma^L\mathbf{D}) \wedge S^V \xrightarrow{1\wedge t} F_H[G,\Sigma^L\mathbf{D}) \wedge (G_+ \wedge_H S^W) \underset{\cong}{\xrightarrow{\zeta^{-1}}}$$

$$G_+ \wedge_H (F_H[G,\Sigma^L\mathbf{D}) \wedge S^W) \xrightarrow{1\wedge\epsilon} G_+ \wedge_H (\Sigma^L\mathbf{D} \wedge S^W) \cong$$

$$G_+ \wedge_H (\mathbf{D} \wedge S^V) \underset{\cong}{\xrightarrow{\zeta}} (G_+ \wedge_H \mathbf{D}) \wedge S^V.$$

La Wirthmüller-avbildningen

$$\omega\colon F_H[G,\Sigma^L\mathbf{D}) \to G \ltimes_H \mathbf{D}$$

være Σ^{-V} anvendt på denne sammensetningen.

Teorem II.6.2. *For H-spektra $\mathbf{D}$ er $\omega\colon F_H[G,\Sigma^L\mathbf{D}) \to G \ltimes_H \mathbf{D}$ en naturlig ekvivalens av G-spektra.*

Teoremet bevises ved å konstruere en G-homotopiinvers til ω, ved å bruke avbildningen $u\colon G \ltimes_H S^W \to S^V$.

Korollar II.6.5. *For G-spektra $\mathbf{E}$ og H-spektra $\mathbf{D}$ er*

$$\omega_*\colon [\mathbf{E},\Sigma^L\mathbf{D}]_H \cong [\mathbf{E},F_H[G,\Sigma^L\mathbf{D})]_G \xrightarrow{\cong} [\mathbf{E},G \ltimes_H \mathbf{D}]_G$$

en naturlig isomorfi.

Korollar II.6.6. *For G-spektra $\mathbf{E}$ og H-spektra $\mathbf{Y}$ er*

$$E_*^H(\Sigma^L \mathbf{Y}) \cong E_*^G(G \ltimes_H \mathbf{Y}).$$

Her er E_*^H den $RO(G;U)$-graderte homologiteorien på H-spektra som kommer fra å oppfatte $\mathbf{E}$ som et H-spektrum.

Korollar (Wirthmüller). *For G-spektra $\mathbf{E}$ og H-rom X er*

$$\tilde{E}_*^H(\Sigma^L X) \cong \tilde{E}_*^G(G \ltimes_H X).$$

La $e\colon 0 \to L$ være inklusjonen av null-rommet. Det er klart at e induserer inklusjoner $e\colon W \to V$ og $e\colon S^W \to S^V$.

Definisjon II.6.15. Transfer-avbildningen

$$\tau\colon \mathbf{S} \to \Sigma^\infty(G/H_+)$$

tilknyttet projeksjonen $c\colon G/H \to *$ dannes fra sammensetningen

$$S^V \xrightarrow{t} G \ltimes_H S^W \xrightarrow{1 \ltimes e} G \ltimes_H S^V \cong \Sigma^V(G/H_+)$$

ved å desuspendere med V.

Den G-ekvivariante Euler-karakteristikken $\chi(G/H) \in \pi_0^G(\mathbf{S})$ er sammensetningen

$$\mathbf{S} \xrightarrow{\tau} \Sigma^\infty(G/H_+) \xrightarrow{\xi} \mathbf{S}$$

der ξ er indusert av c.

Graden til sammensetningen

$$S^V \xrightarrow{t} G_+ \wedge_H S^W \xrightarrow{1 \wedge e} G_+ \wedge_H S^V \xrightarrow{\xi} S^V$$

er lik den klassiske Euler-karakteristikken $\chi(G/H)$.

§II.7: Adams-isomorfien

Adams-isomorfien uttrykker en sammenheng mellom funktorene $(?)/N$ og $(?)^N$ på N-frie G-CW spektra, der $N \subseteq G$ er en normal undergruppe.

Konstruksjon. La $N \subseteq G$ være en normal undergruppe. Da virker G fra venstre på N ved konjugasjon: $g \cdot n = gng^{-1}$. Da virker G også ved konjugasjon på tangentrommet $A = T_e(N)$ til N i e. Vi kaller A den adjungerte G-representasjonen til N.

Tilsvarende virker G fra høyre på N ved konjugasjon: $n \cdot g = g^{-1}ng$. La $G \times_c N$ være det semidirekte produktet av G og N for denne høyre-virkningen. Så N er også en normal undergruppe i $G \times_c N$, med kvotientgruppe G:

$$0 \to N \to G \times_c N \xrightarrow{\epsilon} G \to 0$$

Her er $\epsilon(g,n) = g$. Multiplikasjonen i $G \times_c N$ er $(g,n) \cdot (h,m) = (gh, h^{-1}nhm)$.

Vi kan også oppfatte G som en undergruppe i $G \times_c N$, ved $g \mapsto (g, e)$. Vi vil se på det homogene rommet $(G \times_c N)/G$. Merk at $G \times_c N$ virker transitivt på N ved $(g, n) \cdot m = gnmg^{-1}$, med stabilisator lik undergruppen $G \subset G \times_c N$. Vi identifiserer rommet $(G \times_c N)/G$ med N gjennom denne venstre-virkningen.

Da identifiseres tangentrommet til $(G \times_c N)/G$ i $e = eG$, som G-representasjon, med den adjungerte G-representasjonen A til N. For virkningen av $G \subset G \times_c N$ på N er konjugasjonen $g \cdot m = gng^{-1}$. Videre er tangentbunten til $(G \times_c N)/G$ triviell.

Merk at N nå er en undergruppe av $G \times_c N$ på to forskjellige måter: som elementene (n, e) og som elementene (e, n). Vi vil presisere dette som $N \subset G$ i det første tilfellet, og som $N \subset G \times_c N$ i det andre tilfellet.

La nå U' være et komplett $G \times_c N$-univers. Ved å imbedde $(G \times_c N)/G$ i en tilstrekkelig stor $G \times_c N$-representasjon V, og å la $W = V - A$ som G-representasjon, får vi som i II.5.1 en $G \times_c N$-avbildning

$$S^V \to (G \times_c N)/G_+ \wedge S^W \cong \Sigma^{V-A} N_+.$$

(Vi bruker at også normalbunten til imbeddingen er triviell.) Vi anvender Σ^∞ og desuspenderer med V, og får en avbildning

$$t \colon \mathbf{S} \to \Sigma^{-A} \Sigma^\infty N_+$$

av $G \times_c N$-spektra indeksert på U'. Denne avbildningen t kalles "dimension-shifting pretransfer."

La så $U = (U')^N$ der $N \subset G \times_c N$. Da blir U et komplett G-univers. Videre kan vi danne U^N for $N \subset G$. Vi får inklusjoner av universer

$$U^N \xrightarrow{i} U = (U')^N \xrightarrow{j} U'.$$

La $\theta \colon G \times_c N \to G$ være homomorfien gitt ved $\theta(g, n) = gn$.

La $\mathbf{D} \in G\mathcal{S}U^N$ være et N-fritt G-CW spektrum indeksert på U^N. Da er $\theta^* \mathbf{D}$ et N-fritt $(G \times_c N)$-CW spektrum, når N oppfattes som en undergruppe av $G \subset G \times_c N$. Videre er $j_* i_* \theta^* \mathbf{D}$ et N-fritt $(G \times_c N)$-CW spektrum indeksert på U'. Vi kan danne avbildningen

$$1 \wedge t \colon j_* i_* \theta^* \mathbf{D} \cong j_* i_* \theta^* \mathbf{D} \wedge \mathbf{S} \to j_* i_* \theta^* \mathbf{D} \wedge \Sigma^{-A} \Sigma^\infty N_+ \cong j_* \Sigma^{-A} (i_* \theta^* \mathbf{D} \wedge N_+)$$

av N-frie spektra indeksert på U'. Ved II.2.8 er denne representert på $U = (U')^N$ ved en avbildning

$$\hat{\tau} \colon i_* \theta^* \mathbf{D} \to \Sigma^{-A} (i_* \theta^* \mathbf{D} \wedge N_+)$$

av N-frie $(G \times_c N)$-CW spektra.

Vi danner så orbitspektra for de frie N-virkningene, på dette N-trivielle universet. Resultatet (se II.7.4) er en avbildning

$$\tau \colon \epsilon^\#(\mathbf{D}/N) = i_* \epsilon^*(\mathbf{D}/N) \to \Sigma^{-A} i_* \mathbf{D}$$

av G-spektra indeksert på U. Denne avbildningen τ kalles "dimension-shifting transfer."

Eksempel (S^1-transfer). La Y være et S^1-rom og U et komplett S^1-univers. Da er $ES^1_+ \wedge Y$ et fritt S^1-rom, og vi kan finne et svakt ekvivalent fritt S^1-CW kompleks som vi også kaller $ES^1_+ \wedge Y$.

Med $\mathbf{D} \in S^1\mathcal{S}U^{S^1}$ lik suspensjonsspekteret $\Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge Y)$ dannet i U^{S^1}, er $\mathbf{D}/S^1 \in \mathcal{S}U^{S^1}$ lik $\Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge_{S^1} Y)$, og $\epsilon^\#(\mathbf{D}/S^1) \in S^1\mathcal{S}U$ er samme spektrum gitt triviell S^1-virkning og deretter utvidet over alle S^1-representasjoner i U. Så $\epsilon^\#(\mathbf{D}/S^1)$ er suspensjonsspekteret til $ES^1_+ \wedge_{S^1} Y$ med triviell S^1-virkning, dannet i universet U.

Tilsvarende er $i_*\mathbf{D} \in S^1\mathcal{S}U$ suspensjonsspekteret $\Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge Y)$ dannet i U, og siden $A = \mathbb{R}^1$ har triviell S^1-virkning er $\Sigma^{-A} i_*\mathbf{D} \in S^1\mathcal{S}U$ lik desuspensjonen $\Sigma^{-1}\Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge Y)$. Transferavbildningen er da en S^1-avbildning

$$\tau\colon \Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge_{S^1} Y) \to \Sigma^{-1}\Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge Y).$$

i $S^1\mathcal{S}U$. Glemmer vi S^1-virkningen, suspenderer med $\mathbb{R}^1$ og kollapser ES^1 til et punkt får vi en avbildning

$$c_* \circ \Sigma\tau\colon \Sigma\Sigma^\infty(ES^1_+ \wedge_{S^1} Y) \to \Sigma^\infty Y.$$

Den underliggende romavbildningen er S^1-transferavbildningen

$$\mathrm{trf}_{S^1}\colon Q(\Sigma(ES^1_+ \wedge_{S^1} Y)) \to Q(Y),$$

som er en uendelig-løkkeromsavbildning. Med $Y = \Lambda X_+$ er dette avbildningen som forekommer i beskrivelsen av $TC(X)$; den topologiske sykliske homologien [BHM] til rommet X.

La $J = G/N$ være kvotientgruppen. Merk at $\epsilon^\# = i_*\epsilon^*$ er venstreadjungert til N-fikspunktfunktoren

$$(?)^N = (i^*(?))^N\colon G\mathcal{S}U \to J\mathcal{S}U^N.$$

Derfor har τ en høyreadjungert avbildning

$$\tilde{\tau}\colon \mathbf{D}/N \to (\Sigma^{-A} i_*\mathbf{D})^N.$$

Teorem II.7.1. *For N-frie G-CW spektra $\mathbf{D}$ indeksert på U^N er den adjungerte*

$$\tilde{\tau}\colon \mathbf{D}/N \to (\Sigma^{-A} i_*\mathbf{D})^N$$

til τ en naturlig ekvivalens av J-spektra indeksert på U^N.

Teoremet bevises ved å redusere til $\mathbf{D} = \mathbf{S}^0_H$ med $H \cap N = 1$. I dette tilfellet kan $\tilde{\tau}$ omskrives ved hjelp av Wirthmüller-avbildningen ω, og man kan ad omveier konstruere en homotopiinvers.

Korollar II.7.2. *Hvis $\mathbf{D} \in G\mathcal{S}U^N$ er et N-fritt G-CW spektrum og $\mathbf{E} \in J\mathcal{S}U^N$, så er*

$$\tilde{\tau}_*\colon [\mathbf{E}, \mathbf{D}/N]_J \xrightarrow{\cong} [\mathbf{E}, (\Sigma^{-A} i_*\mathbf{D})^N]_J \cong [\epsilon^\#\mathbf{E}, \Sigma^{-A} i_*\mathbf{D}]_G$$

en naturlig isomorfi.

Korollar (Adams). *Hvis X er et N-fritt G-CW kompleks og Y et J-CW kompleks, så er*

$$[\Sigma^\infty Y, \Sigma^\infty X/N]_J \cong [\Sigma^\infty Y, \Sigma^{-A}\Sigma^\infty X]_G.$$

Bemerkninger II.7.3. (i) Hvis N ikke er Abelsk og har positiv dimensjon så virker N ikke-trivielt på A. Da lar desuspensjonsfunktoren Σ^{-A} seg bare definere i $\bar{h}G\mathcal{S}U$ og ikke i $\bar{h}G\mathcal{S}U^N$.

(ii) Selv om $A = 0$ kan ikke $(i_*\mathbf{D})^N$ erstattes med $\mathbf{D}^N$ i II.7.1. For eksempel hvis $G = N$ er endelig og $\mathbf{D} = \Sigma^\infty G_+$ i $G\mathcal{S}U$, så er $\mathbf{D}^G = *$ mens teoremet viser at $(i_*\mathbf{D})^G = \mathbf{S}$. Så N-frie G-CW spektra har typisk ikke trivielle N-fikspunktspektra.

§II.8: Splitte spektra

La U være et komplett G-univers, la $A = T_e(G)$ være den adjungerte G-representasjonen, og la $i\colon U^G \to U$ være inklusjonen.

Definisjon (se II.8.4). For $\mathbf{E}_G \in G\mathcal{S}U$ la $\mathbf{E} \in \mathcal{S}U^G$ være $i^*\mathbf{E}_G$ med glemt G-virkning. Vi tenker på $\mathbf{E}$ som det underliggende ikke-ekvivariante spekteret til $\mathbf{E}_G$. Det er en naturlig inklusjon

$$\iota\colon (\mathbf{E}_G)^G = (i^*\mathbf{E}_G)^G \to \mathbf{E}.$$

Vi sier at G-spekteret $\mathbf{E}_G$ er splitt dersom det finnes en spektrumsavbildning $\zeta\colon \mathbf{E} \to (\mathbf{E}_G)^G$ slik at $\iota\zeta \simeq 1$. Da er ι en homotopiretraksjon, med ζ som en homotopiseksjon.

Teorem II.8.1. *La $\mathbf{E}_G \in G\mathcal{S}U$ være et splitt G-spektrum, med underliggende ikke-ekvivariant spektrum $\mathbf{E}$. Da er det naturlige isomorfier*

$$E^*(\mathbf{D}/G) \cong \mathbf{E}^*_G(i_*\mathbf{D}) \qquad \text{og} \qquad E_*(\mathbf{D}/G) \cong E^G_*(\Sigma^{-A} i_*\mathbf{D})$$

for ethvert G-fritt G-CW spektrum $\mathbf{D}$. Spesielt, for ethvert G-fritt G-CW kompleks X er

$$\tilde{E}^*(X/G) \cong \tilde{E}^*_G(X) \qquad \text{og} \qquad \tilde{E}_*(X/G) \cong \tilde{E}^G_*(\Sigma^{-A} X).$$

Her står $\Sigma^{-A}X$ for $\Sigma^{-A}\Sigma^\infty X$. Dette resultatet kan generaliseres til å relatere G-ekvivariant og J-ekvivariant (ko-)homologi for N-frie G-CW spektra, for $N \subseteq G$ normal og $J = G/N$, men hypotesen kan da best formuleres ved hjelp av familier, som vi har utelatt.

Eksempel. Det G-ekvivariante sfærespekteret $\mathbf{S}_G$ er splitt. Dermed er $\pi^*_S(X/G) \cong \pi^*_G(X)$ og $\pi^S_*(X/G) \cong \pi^G_*(\Sigma^{-A}X)$ for G-fri G-CW komplekser X. Likeledes er de G-ekvivariante topologiske K-teorispektrene KU_G og KO_G splitte.

La $Ad(WH) = T_e(WH)$ være den adjungerte WH-representasjonen.

Teorem (Segal–tom Dieck). *La X være et G-CW kompleks. Det er en naturlig splitting*

$$(\Sigma^\infty X)^G \simeq \bigvee_{(H)} EWH_+ \wedge_{WH} \Sigma^{Ad(WH)} \Sigma^\infty X^H$$

der summen løper over alle konjugasjonsklasser av undergrupper $H \subseteq G$ slik at $WH = NH/H$ er endelig.

Spesielt, for G endelig og $X = S^0$ er

$$(\mathbf{S}_G)^G \simeq \bigvee_{(H)} \Sigma^\infty(BWH_+)$$

så $Q_G(S^0)^G \simeq \prod_{(H)} Q(BWH_+)$.

§II.9: Romvise fikspunkter

((Eksempel: Kofibersekvensen for THH.))

§III: Ekvivariant dualitetsteori

((Spanier–Whitehead dualitet: $\mathbf{X}$ retrakt av endelig G-CW spektrum. Da er $F(\mathbf{X}, \mathbf{E}) \simeq D\mathbf{X} \wedge \mathbf{E}$ så $E_G^*(\mathbf{X}) \cong E_{-*}^G(D\mathbf{X})$. Her er dualet $D\mathbf{X} = F(\mathbf{X}, \mathbf{S})$.))

§IV: Ekvivariant transfer

((..))

Generalisert Tate kohomologi

((..))

Referanser

[A] J. F. Adams, *Prerequisites (on equivariant theory) for Carlsson's lecture*, Algebraic Topology, Proc. Conf., Aarhus 1982, Lecture Notes in Math., vol. 1051, Springer Verlag, 1984, pp. 483–532.

[BHM] M. Bökstedt, W. C. Hsiang and I. Madsen, *The cyclotomic trace and algebraic K-theory of spaces*, Invent. Math. **11** (1993), 465–540.

[LMS] L. G. Lewis, Jr., J. P. May and M. Steinberger, *Equivariant Stable Homotopy Theory*, Lecture Notes in Math., vol. 1213, Springer Verlag, 1986.

[W] K. Wirthmüller, *Equivariant homology and duality*, Manuscripta Math. **11** (1974), 373–390.