ALGEBRAISK K-TEORI OG SYMMETRIER AV MANGFOLDIGHETER

John Rognes

4. Januar 1998

Hva handler klassisk algebraisk K-teori om ?

La R være en ring, f.eks. ringen $\mathbb{R}$ av reelle tall, $R = C(X)$ ringen av kontinuerlige reelle funksjoner på et rom X, eller kanskje $R = S$, sfærespekteret.

I lineær algebra løser vi $n \times n$ ligningssystemer som $Ax = b$ ved Gauss-Jordan eliminasjon, dvs. ved radoperasjoner, dvs. ved å multiplisere fra venstre med ulike typer elementære matriser til vi har funnet $x = A^{-1}b$. Vi faktoriserer altså A som et produkt av elementære matriser. Her tenker jeg på A som en $n \times n$ matrise med elementer fra R.

La oss først se på den viktigste typen elementære matriser; $e_{ij}(r)$ som bare skiller seg fra identitetsmatrisen ved at elementet i posisjon (i, j) er lik $r \in R$. Her er $i \neq j$. Vi får $e_{ij}(r) \cdot A$ fra A ved å legge til r ganger den $j$te raden til den $i$te raden i A.

Det fine med elementære matriser er at det er lett å invertere dem:

$$e_{ij}(r)^{-1} = e_{ij}(-r)$$

Så hvis vi kan skrive

$$A = e_{ij}(r) \cdot \ldots \cdot e_{kl}(s)$$

finner vi

$$A^{-1} = e_{kl}(-s) \cdot \ldots \cdot e_{ij}(-r).$$

Men hvilke matriser kan faktoriseres som et produkt av slike elementære matriser ?

La $GL_n(R)$ være gruppen av invertible $n \times n$ matriser med elementer i R, og la $E_n(R) \subset GL_n(R)$ være undergruppen generert av de elementære matrisene. Kvosientmengden

$$GL_n(R)/E_n(R)$$

måler hindringene mot at en invertibel matrise kan skrives som et produkt av elementære matriser, dvs. at hvis A er slik at $Ax = b$ alltid har en entydig løsning, så kan vi finne denne løsningen ved den restrikterte Gauss-Jordan eliminasjon, hvis og bare hvis restklassen $[A]$ til A er lik elementet $[I]$ i $GL_n(R)/E_n(R)$.

$E_n(R)$ inneholder nære slektninger av permutasjonsmatrisene, så de radoperasjonene som bytter om på to rader er egentlig overflødige. Vi skal ta med radoperasjonen som ganger en rad med et invertibelt element i R litt senere.

Generelt er ikke $E_n(R)$ normal i $GL_n(R)$, så mengden ovenfor behøver ikke være en gruppe. Men hvis vi er villige til å stabilisere problemet, dvs. la n vokse på en kontrollert måte, så ordner dette seg.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Definisjon. Vi inkluderer $GL_n(R)$ inn i $GL_{n+1}(R)$ ved

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og definerer:

$$GL(R) = \bigcup_n GL_n(R) \qquad \text{og} \qquad E(R) = \bigcup_n E_n(R)$$

Dette er grupper av uendelig store matriser, som bare skiller seg fra identitetsmatrisen i endelig mange elementer.

J.H.C. Whitehead's lemma.

$$E(R) = [GL(R), GL(R)]$$

er kommutatorundergruppen i $GL(R)$, som er normal i $GL(R)$.

Definisjon.

$$K_1(R) = GL(R)/E(R) = GL(R)/[GL(R), GL(R)]$$

er den maksimale Abelske kvosientgruppen av $GL(R)$. Vi oppfatter $K_1(R)$ som en additiv gruppe.

Gitt $A \in GL_n(R) \subset GL(R)$ har den en restklasse $[A] \in K_1(R)$. Hvis vi er villige til å føye til ekstra trivielle ligninger på formen $1 \cdot x_m = b_m$ for $m > n$, blir altså spørsmålet om koeffisientmatrisen A kan skrives som et produkt av elementære matriser ekvivalent med spørsmålet om $[A] \in K_1(R)$ er null eller ikke.

La oss nå ta med radoperasjonen som ganger en rad med en enhet $r \in R^\times$. Da kan vi i tillegg løse ligningssystemene med koeffisientmatrise A som er slik at $[A]$ ligger i bildet av sammensetningen

$$R^\times = GL_1(R) \to GL(R) \to K_1(R).$$

Hvis vi antar at R er kommutativ, så definerer determinanten $\det\colon GL(R) \to R^\times$ en surjeksjon $\det\colon K_1(R) \to R^\times$, som splittes av sammensetningen ovenfor. Så den virkelige obstruksjonen mot Gauss-Jordan eliminasjon ligger i kjernen

$$SK_1(R) = \ker(\det\colon K_1(R) \to R^\times) = SL(R)/E(R).$$

Hvis R er en kropp, så som $\mathbb{R}$, eller et Euklidisk område, så som $\mathbb{Z}$, eller (Bass-Milnor-Serre) en heltallsring i en tallkropp, så er $SK_1(R) = 0$. Da fører Gauss-Jordan eliminasjon alltid frem.

Men for generelle ringer kan $SK_1(R)$ godt være ikketriviell.

Eksempel. La $R = C(X)$ være ringen av kontinuerlige reelle funksjoner på et topologisk rom X. Da er $SK_1(C(X))$ lik gruppen av homotopiklasser av avbildninger fra X til den uendelige rotasjonsgruppen

$$SO = \bigcup_n SO(n).$$

Så for $X = S^1$ er $SK_1(C(S^1)) = \mathbb{Z}/2$, siden det er to homotopiklasser av lukkede kurver i $SO(n)$ for $n \geq 3$. Det finnes altså invertible matriser over $C(S^1)$ som ikke kan inverteres ved Gauss-Jordan eliminasjon.

Det finnes også "klassiske" grupper $K_0(R)$ og $K_2(R)$ definert for alle ringer R. $K_0(R)$ har med isomorfiklasser av projektive moduler å gjøre, og $K_2(R)$ er et universelt objekt for såkalte symboler definert over R, som f.eks. Hilbert-symbolet. Når $R = \mathcal{O}_F$ er ringen av algebraiske heltall i en tallkropp $F/\mathbb{Q}$, så forenkler K_0 til

$$K_0(R) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(F)$$

der $\mathrm{Cl}(F)$ er idealklassegruppen til F. Dette er en endelig gruppe, som omtrent måler i hvilken grad Kummers ideale tall, dvs. idealer i R, er virkelige tall, dvs. hovedidealer i R.

For $F = \mathbb{Q}$ er $R = \mathbb{Z}$ og $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}) = 0$, mens for $F = \mathbb{Q}(\zeta_{37})$ er $R = \mathbb{Z}[\zeta_{37}]$ og $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\zeta_{37})) \cong \mathbb{Z}/37 \neq 0$. Her er ζ_{37} en primitiv 37te rot av enheten. Så det er flere ideelle enn vanlige tall i $\mathbb{Z}(\zeta_{37})$, entydig faktorisering i primfaktorer slår feil i denne ringen, og argumentet til Lamé og Cauchy fra 1848 for å vise Fermats siste teorem, bryter sammen.

Gruppene $K_0(R)$, $K_1(R)$ og $K_2(R)$ oppfanger altså sentrale algebraiske og tallteoretiske egenskaper ved ringen R. Noe mer overraskende er kanskje at disse tre gruppene er knyttet til hverandre. For eksempel finnes det en eksakt sekvens

$$\bigoplus_p K_2(\mathbb{F}_p) \to K_2(\mathbb{Z}) \to K_2(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial}$$
$$\bigoplus_p K_1(\mathbb{F}_p) \to K_1(\mathbb{Z}) \to K_1(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\partial}$$
$$\bigoplus_p K_0(\mathbb{F}_p) \to K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(\mathbb{Q}) \to 0.$$

Her er $\mathbb{F}_p$ primkroppen med p elementer, og i summene løper p over alle primtall. At sekvensen er eksakt, betyr at bildet av en homomorfi alltid er lik kjernen til den neste homomorfien.

Quillen K-teori.

Omkring 1969 innså D. Quillen at de tre gruppene var tre sider av samme sak, eller snarere, tre homotopigrupper av samme topologiske rom. Det finnes altså et naturlig definert rom $K(R)$, slik at

$$K_i(R) = \pi_i(K(R))$$

for $i = 0, 1, 2$. Her består den $i$te homotopigruppen $\pi_i(X)$ av homotopiklassene av (baserte) avbildninger

$$f : S^i \to X$$

fra enhetssfæren $S^i \subset \mathbb{R}^{i+1}$ til rommet X. Dermed ble høyere algebraisk K-teori født, ved å definere $K_i(R)$ for $i \geq 3$ ved formelen ovenfor. Men egentlig er det rommet $K(R)$, eller dets homotopitype, som koder den informasjonen om R vi er interessert i, og som bør studeres.

Jeg vil bare skissere definisjonen av $K(R)$: Man starter med kategorien av endelig-genererte projektive R-moduler, forer den til en såkalt uendelig løkkeromsmaskin, og ut kommer rommet $K(R)$. Så bærer man den uendelige løkkeromsmaskinen opp på loftet, inntil til man trenger den igjen.

Ulike slags ringer.

Klassisk K-teori tar altså som input en assosiativ ring, gjerne med enhet. Geometrisk sett kan slike ringer tenkes på som ringen av funksjoner på et eller annet slags rom. For ikke-kommutative ringer (C^*-algebraer) blir dette ikke rom i noen topologisk forstand, mens i det kommutative tilfellet er det interessant å globalisere ringene i retning skjemateori (algebraisk geometri), med ulike valg av Grothendieck topologier. For heltallsringer i tallkropper er det primidealene som oppfører seg som punkter på en slags kurve (tallteori), mens de K-teoretiske invariantene i geometrisk topologi gjerne er tilknyttet grupperingen til en fundamentalgruppe. De nyere anvendelsene til geometrisk topologi bruker en videre klasse av ringer opp til homotopi, der f.eks. en gruppering $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ fetes opp til et ring opp til homotopi $Q(\Omega M_+)$.

$$\begin{tikzcd}
& \text{tallkropper} & & \\
C^*\text{-algebraer} & \text{ringer} \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r] & \text{grupperinger} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{ringer opp}\\ \text{til homotopi}\end{array} \\
& \text{skjemaer} & &
\end{tikzcd}$$

Homotopigrupper.

Minner om at to avbildninger $f, g \colon S^i \to X$ er homotope hvis f kan deformeres kontinuerlig over i g. Gruppene $\pi_0(X)$, $\pi_1(X)$, $\pi_2(X)$, $\dots$ måler gradvis hvor høyt sammenhengende rommet X er, eller omvendt, hva slags essensielle hull som finnes i X.

Spesielt er X veisammenhengende hvis og bare hvis $\pi_0(X) = 0$. Da kan et punkt A i X alltid forbindes med en vei til et vilkårlig annet punkt B i X. Og X er enkelt-sammenhengende hvis og bare hvis også $\pi_1(X) = 0$. Da kan en vei fra A til B alltid deformeres over i en vilkårlig annen vei fra A til B.

De forskjellige homotopigruppene $\pi_i(X)$ gir en følge invarianter av X. I en forstand er $\pi_0(X)$ den mest dominerende invarianten, så følger $\pi_1(X)$, og så videre. Vi kan tenke på dette som at $\pi_i(X)$ svarer til den $i$te desimalplassen etter komma i et reellt tall. Så gitt to rom X og Y og en avbildning $f \colon X \to Y$ slik at $f_* \colon \pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$ for alle $i \leq n$ kan vi tenke på det som at X og Y stemmer overens til n desimaler. Vi sier at avbildningen f er n-sammenhengende, og at X og Y stemmer overens opp til grad n. Hvis n vokser, stemmer X og Y overens i flere homotopigrupper, og vi vil tenke på dette som at X og Y er mer like hverandre.

Hvis $f_* \colon \pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$ er en isomorfi for alle i sier vi at f er en (svak) homotopiekvivalens fra X til Y.

Hva så med symmetrier av mangfoldigheter ?

I Abel og Galois' ligningsteori studeres algebraiske symmetrier, eller substitusjoner, gjennom gruppen av isomorfier $F \to F$ av en tallkropp F over $\mathbb{Q}$. De endelige gruppene som oppstår minner om gruppene av geometriske symmetrier, alias kongruenser eller isometrier, av geometriske figurer. Et regulært n-gon har $2n$ isometrier, nemlig n rotasjoner og n refleksjoner. Til sammen danner de dihedergruppen D_n av orden $2n$.

Lar vi n vokse mot uendelig, nærmer polygonet seg en sirkel, $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Denne har uendelig mange geometriske symmetrier, nemlig den ortogonale gruppen $O(2)$. Denne mengden har en naturlig topologi, og vi kan tenke på om to kongruenser ligger nært eller fjernt fra hverandre. Gruppen av isometrier av sirkelen danner igjen to sirkler: en sirkel av rotasjoner og en sirkel av refleksjoner. Vi har en Lie-gruppe.

La så M være en Riemannsk mangfoldighet. Dette betyr at M er en topologisk mangfoldighet, dvs. et lokalt Euklidisk Hausdorff rom. Videre er M utstyrt med et glatt atlas av kartomegner, dvs. vi vet hvilke funksjoner $f\colon M \to \mathbb{R}$ som er (uendelig) differensiable. Da har M et tangentrom T_pM i hvert punkt $p \in M$. Og til sist har vi valgt et positivt definitt indreprodukt g_p på hvert tangentrom T_pM, som varierer glatt i p. Dette er den Riemannske metrikken g.

Enkle eksempler på slike Riemannske mangfoldigheter er enhetsdisken $D^n \subset \mathbb{R}^n$, og dens rand, enhetssfæren S^{n-1}.

På en Riemannsk mangfoldighet kan man snakke om lengden av en tangentvektor, og ved å integrere langs en kurve kan man definere lengden til en kurve. Avstanden mellom to punkter er typisk lengden til den korteste kurven. Så M er et metrisk rom. En isometri av M er en glatt avbildning $f\colon M \to M$ som bevarer alle avstander. Den er da spesielt en diffeomorfi, og dermed en homeomorfi av M med seg selv.

Theorem (Myers-Steenrod, 1939). *Gruppen av isometrier av en Riemannsk mangfoldighet er en Lie-gruppe.*

Så Lie-teori handler på en måte om differensial-geometriske symmetrier, dvs. isometrier. Symmetrigruppene blir i dette tilfellet endelig-dimensjonale mangfoldigheter, og det er fruktbart å studere deres topologi.

Men hva med de rent differensiable symmetriene, dvs. diffeomorfiene, eller de topologiske symmetriene, dvs. homeomorfiene ? La $\mathrm{Diff}(M)$ være gruppen av diffeomorfier $M \to M$, og la $\mathrm{Homeo}(M)$ være gruppen av homeomorfier $M \to M$. Disse avhenger ikke av den Riemannske metrikken, og $\mathrm{Homeo}(M)$ er uavhengig av det glatte atlaset. Vi kan også gi disse gruppene en topologi. Videre kan vi se på den topologiske monoiden $G(M)$ av homotopi-ekvivalenser $M \to M$. Vi får kontinuerlige homomorfier

$$\mathrm{Isom}(M) \to \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Homeo}(M) \to G(M)$$

av topologiske grupper/monoider, som svarer til å glemme mer og mer struktur.

Mens $\mathrm{Isom}(M)$ er en Lie-gruppe, er gruppene $\mathrm{Diff}(M)$ og $\mathrm{Homeo}(M)$ typisk uendelig-dimensjonale. Det er derfor ikke så lett å studere deres lokale struktur, og stort sett håpløst å bestemme deres topologiske type, dvs. deres homeomorfi-klasse. Men et interessant, og noe mer tilgjengelig problem, er å beskrive homotopi-typen til disse automorfisme-rommene.

Problemet med å generalisere Galois- og Lie-teori fra studiet av algebraiske eller geometriske symmetrier til differensiable eller topologiske symmetrier lyder derfor: Finn homotopi-typen til rommene $\mathrm{Diff}(M)$ og $\mathrm{Homeo}(M)$ for en mangfoldighet M.

Kirurgi-teori og konkordans.

La meg fokusere på det differensiable tilfellet, dvs. $\mathrm{Diff}(M)$. Mye blir analogt for $\mathrm{Homeo}(M)$.

Algebraisk topologi og homotopiteori gir en god del informasjon om homotopiekvivalensene $G(M)$ av en mangfoldighet. Og kirurgi-teorien utviklet rundt 1970 av Browder, Novikov, Sullivan og Wall ledet til et maskineri for å klassifisere mangfoldigheter i dimensjon $n \geq 5$, samt følgende fibersekvens

$$G(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}(M) \to \mathrm{Map}(M, G/O) \to L^s(M).$$

Jeg skal ikke forklare hva disse symbolene betyr, men at det er en fibersekvens gjør at fordi man vet mye om $\mathrm{Map}(M, G/O)$ og $L^s(M)$ så vet man også mye om det venstre leddet $G(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$. Tilsvarende er det en fibersekvens

$$\widetilde{\mathrm{Diff}}(M) \to G(M) \to G(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$$

så fordi man vet mye om $G(M)$ vet man også mye om $\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$.

Men hva betyr denne slangen over Diff ? Jo, det er ikke den virkelige topologiske gruppen av diffeomorfier av M som kirurgi-teorien uttaler seg om, men bare en beslektet variant, de såkalte blokk-diffeomorfismene av M. Dette er en større gruppe enn $\mathrm{Diff}(M)$, og vi har en fibersekvens

$$\mathrm{Diff}(M) \to \widetilde{\mathrm{Diff}}(M) \to \widetilde{\mathrm{Diff}}(M)/\mathrm{Diff}(M)$$

som viser at det vi mangler for å forstå $\mathrm{Diff}(M)$ er det "homogene rommet"

$$\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)/\mathrm{Diff}(M)$$

som måler forskjellen mellom diffeomorfier og blokk-diffeomorfier.

Eksempel. En kurve $\phi\colon I \to \mathrm{Diff}(M)$ er en isotopi, dvs. en familie av diffeomorfier $\phi_t\colon M \to M$ for $i \in I = [0, 1]$. Disse kan limes sammen til en diffeomorfi

$$\Phi\colon M \times I \to M \times I$$

med $\Phi(p, t) = (\phi_t(p), t)$ som bevarer I-koordinaten t.

Men en kurve $\psi\colon I \to \widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$ er essensielt en konkordans, som er en diffeomorfi

$$\Psi\colon M \times I \to M \times I$$

som bevarer endene $M \times 0$ og $M \times 1$, men ikke nødvendigvis bevarer I-koordinaten i det indre av I.

A. Hatcher viste i 1974 hvordan et rom av h-kobordismer på M interpolerer mellom $\mathrm{Diff}(M)$ og $\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$. I en nyere formulering har vi:

Teorem (M. Weiss og B. Williams, 1988). *Det er et (uendelig løkke-)rom* $\mathrm{Wh}(M)$ *med en involusjon, og en avbildning*

$$\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)/\mathrm{Diff}(M) \to \Omega\Omega^\infty \mathrm{Wh}(M)_{hC_2}$$

som er $(n/3 - c)$*-sammenhengende, der* $n = \dim(M)$ *og* c *er en konstant.*

Det som er forbløffende er at $\mathrm{Wh}(M)$ bare avhenger av homotopitypen til mangfoldigheten M, altså ikke at det er en mangfoldighet, og ikke hvilken differensiabel struktur som er valgt. Videre er involusjonen på $\mathrm{Wh}(M)$ bare avhengig av den stabile tangensielle typen til M, som også er en svak opplysning.

Waldhausen A-teori.

Nå skal vi se på hvordan disse geometrisk-topologiske problemstillingene har en tilknytning til algebraisk K-teori.

Whitehead-rommet $\mathrm{Wh}(M)$ ble definert av F. Waldhausen omkring 1974, og i flere trinn frem til 1984 viste han at det er en faktorisering

$$A(M) \simeq Q(M_+) \times \mathrm{Wh}(M).$$

Her er $Q(M_+) = \bigcup_n \Omega^n \Sigma^n (M_+)$ et rom hvis homotopigrupper er de stabile homotopigruppene til M. Man vet mye om dette. Forbindelsen til algebraisk K-teori går gjennom Waldhausens definisjon av rommet $A(M)$, som representerer Waldhausens algebraiske K-teori av rommet M, på samme måte som $K(R)$ representerer Quillens algebraiske K-teori av ringen R.

Poenget er at $A(M)$ er K-teoretisk definert. Det vil si, man starter med en passende kategori av rom knyttet til M, så henter man den uendelige løkkeromsmaskinen ned fra loftet, forer den med denne nye kategorien, og ut kommer rommet $A(M)$. Kategorien av rom knyttet til M kan oppfattes som endelig genererte projektive moduler over ringen opp til homotopi $Q(\Omega M_+)$, men det er teknisk komplisert å gi en god mening til dette.

Det er så et håp om at man skal kunne bruke det man vet om algebraisk K-teori til å forstå Waldhausens rom $A(M)$. Da vet man om $\mathrm{Wh}(M)$, og dermed om $\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)/\mathrm{Diff}(M)$. Fra kirurgiteorien vet man om $\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)$, og settes alt dette sammen finner man $\mathrm{Diff}(M)$. I teorien.

Problemet er hvor mye man vet om algebraisk K-teori. På 70-tallet hadde man A. Borels beregning av f.eks. $K_i(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$, og det var nok til å beskrive $\pi_i(A(D^n)) \otimes \mathbb{Q}$ for en disk $M = D^n$. Fra dette fant Farrell-Hsiang informasjon om $\pi_i(\mathrm{Diff}(D^n)) \otimes \mathbb{Q}$ for $i < n/3 - c$. Og Hsiang-Jahren kunne beskrive $\pi_i(\mathrm{Diff}(L)) \otimes \mathbb{Q}$ for linserom L.

Det er kjent at gruppene $\pi_i(A(M))$ er endelig-genererte Abelske grupper når $\pi_1(M)$ er endelig. De rasjonale resultatene ovenfor ignorerer fullstendig torsjonsundergruppene, og ser bare rangen til $\pi_i(A(M))$ og $\pi_i(\mathrm{Diff}(M))$. Fra et algebraisk topologisk synspunkt sier den rasjonale informasjonen bare en del om hvordan rommet $\mathrm{Diff}(M)$ er bygget opp. Vi mangler torsjonsinformasjonen, og k-invariantene som knytter de forskjellige homotopigruppene sammen. Uten mer kunnskap om K-teori kom ikke prosjektet skissert ovenfor særlig mye videre.

Sporinvarianter.

På 90-tallet har vi lært en god del mer om torsjonsinformasjonen i algebraisk K-teori, dvs. om p-Sylow undergruppene i $K_i(R)$ og $\pi_i(A(M))$ for de forskjellige primtallene p. Det er derfor nytt håp om å kunne beskrive torsjonen i $\pi_i(\mathrm{Diff}(M))$ for enkle mangfoldigheter M.

Som vi har sett er innfallsporten til dette prosjektet at vi kan si noe om Waldhausens algebraiske K-teori av mangfoldigheten M, kodet i rommet $A(M)$.

La nå $R = \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ være grupperingen til fundamentalgruppen til M. Hvis $M = D^n$ er $R = \mathbb{Z}$. Det er da en lineariseringsavbildning

$$L\colon A(M) \to K(R).$$

Her kan vi tenke på $A(M)$ som K-teorien til ringen opp til homotopi $Q(\Omega M_+)$. Men $\pi_0(Q(\Omega M_+)) = \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$, så avbildningen $Q(\Omega M_+) \to \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ som tar hvert punkt til sin veisammenhengskomponent induserer lineariseringsavbildningen L.

Hvis vi kan beskrive $K(R)$, og samtidig beskrive forskjellen mellom $A(M)$ og $K(R)$, så har vi et grep på $A(M)$.

Allerede Waldhausens første artikkel om A-teori viste at forskjellen mellom $A(M)$ og $K(R)$ hadde noe med Hochschild homologi å gjøre. Senere ble dette raffinert til topologisk Hochschild homologi, og etter inntredenen av Connes' sykliske homology innførte Bökstedt, Hsiang og Madsen i 1989 en såkalt syklotomisk sporavbildning fra K-teori til topologisk syklisk homologi, betegnet TC.

Det er derfor et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} A(M) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\mathrm{trc}"] & K(R) \arrow[d, "\mathrm{trc}"] \\ TC(M) \arrow[r, "L"] & TC(R) \end{tikzcd}$$

Her er de to nederste hjørnene, $TC(M)$ og $TC(R)$, tilgjengelige ved hjelp av algebraisk topologi. I hvert fall når M er enkelt-sammenhengende så $R = \mathbb{Z}$. Bökstedt-Hsiang-Madsen beskrev $TC(M)$ generelt i 1989, mens Bökstedt-Madsen beskrev p-Sylow undergruppene i $\pi_i(TC(\mathbb{Z}))$ for p odde i 1994, og Rognes beskrev 2-Sylow undergruppene i 1996. Vi vet derfor mye om forskjellen mellom $TC(M)$ og $TC(R)$.

Teorem (B. Dundas, 1995). *Diagrammet ovenfor er homotopi Kartesisk, så forskjellen mellom $A(M)$ og $K(R)$ er lik forskjellen mellom $TC(M)$ og $TC(R)$.*

Ved å samle disse resultatene vet vi altså mye om forskjellen mellom $A(M)$ og $K(R)$ for enkelt-sammenhengende mangfoldigheter M, når $R = \mathbb{Z}$.

Problemet som gjenstår er hva vi vet om torsjonen i $K(\mathbb{Z})$.

I 1996 annonserte V. Voevodsky at han hadde vist Milnor-formodningen om Witt-ringen av kvadratiske former og étale kohomologi. Sammen med en spektralsekvens konstruert av Bloch og Lichtenbaum leder dette til et bevis av den 2-primære delen av Lichtenbaum-Quillen formodningen, som sier hva gruppene $K_i(\mathbb{Z})$ bør være for alle i. I Rognes-Weibel kytter vi opp denne forbindelsen.

Gitt disse resultatene vet vi nå alt om 2-torsjonen i $K_i(\mathbb{Z})$. Siden vi kjenner 2-torsionen i homotopigruppene til $TC(D^n)$ og $TC(\mathbb{Z})$, og forskjellen mellom disse er som forskjellen mellom $A(D^n)$ og $K(\mathbb{Z})$, så kjenner vi 2-torsjonen i $A(D^n)$. Dette gir igjen 2-torsjonen i Whitehead-rommet $\mathrm{Wh}(D^n)$, som beskriver forskjellen mellom 2-torsjonen i homotopien til $\widetilde{\mathrm{Diff}}(D^n)$ og $\mathrm{Diff}(D^n)$ (opp til grad $n/3 - c$).

Her gjenstår det å bestemme involusjonen på $\mathrm{Wh}(D^n)$ før jeg kan gi eksplisitte formler for hvordan rommet av diffeomorfier av disker ser ut, men dette bør være relativt enkelt.

Tilsvarende resultater kan fås for andre enkeltsammenhengende mangfoldigheter M ved å dechiffrere Bökstedt-Hsiang-Madsens beskrivelse av $TC(M)$.

Konklusjon. Bökstedt, Hsiang og Madsens konstruksjon av topologisk syklisk homologi og syklotomsporet, Dundas' teorem som viser at relativ K-teori er lik relativ TC, og utregninger av Bökstedt, Madsen og Rognes har gitt oss skarp homotopiteoretisk informasjon om forskjellen mellom Waldhausens $A(M)$ og Quillens $K(R)$ for $R = \mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ når M er enkeltsammenhengende. Ved primtallet 2, hvor vi har kunnskap om $K(\mathbb{Z})$, gir dette 2-primær informasjon om rommet av diffeomorfier av disker D^n. For odde primtall p vil tilsvarende informasjon on $K(\mathbb{Z})$ gi tilsvarende p-primær informasjon om $\mathrm{Diff}(D^n)$ (opp til grad $n/3 - c$).