GRUPPEHOMOLOGI

John Rognes

April 1998

1. Bar-resolusjonen

La G være en gruppe.

La $\mathcal{E}G$ være kategorien med elementene i G som objekter, og en entydig morfisme fra g til g' for hver $g, g' \in G$. Vi kaller denne morfismen $g'g^{-1}$. Så gitt $g, h \in G$ er det en entydig morfisme $h \colon g \to hg$. Sammensetningen av morfismer er da gitt ved multiplikasjonen i gruppen: $h \circ h' = hh'$.

Kategorien $\mathcal{E}G$ har f.eks. enhetselementet $e \in G$ som initielt objekt. Derfor er realiseringen $EG = |\mathcal{E}G|$ kontraktibel. Her er EG den simplisielle mengden

$$[q] \mapsto G^{q+1}$$

der et element $(g_0, \dots, g_q) \in G^{q+1}$ tenkes på som et diagram

$$g_0 \xleftarrow{g_0 g_1^{-1}} g_1 \xleftarrow{g_1 g_2^{-1}} \dots \xleftarrow{g_{q-1} g_q^{-1}} g_q$$

i $\mathcal{E}G$. Fasett-avbildningen d_i sletter g_i fra dette diagrammet, og erstatter $g_{i-1}g_i^{-1}$ og $g_i g_{i+1}^{-1}$ med sammensetningen $g_{i-1}g_{i+1}^{-1}$.

Siden G har inverser kan vi alternativt beskrive simplekset $(g_0, \dots, g_q)$ ved objektet g_q og q-tuplet av morfismer $g_0 g_1^{-1}, \dots, g_{q-1}g_q^{-1}$. Vi bruker bar-notasjonen til Eilenberg og Mac Lane:

$$(g_0, \dots, g_q) = [g_0 g_1^{-1} | \dots | g_{q-1} g_q^{-1}] g_q = [h_1 | \dots | h_q] g_q$$

der elementene $h_i = g_{i-1} g_i^{-1}$ er en slags homogene koordinater. Fasett-avbildningen d_i er da gitt ved

$$d_i([h_1|\dots|h_q]g_q) = \begin{cases} [h_2|\dots|h_q]g_q & i = 0, \\ [h_1|\dots|h_i h_{i+1}|\dots|h_q]g_q & 0 < i < q, \\ [h_1|\dots|h_{q-1}]h_q g_q & i = q. \end{cases}$$

For $q = 0$ skriver vi $(g_0) = []g_0$.

Gruppen G virker fritt på $\mathcal{E}G$ fra høyre, ved $g \cdot \gamma = g\gamma$ på objektene, og $(h \colon g \to hg) \cdot \gamma = (h \colon g\gamma \to hg\gamma)$ på morfismene. I bar-notasjonen er virkningen

$$[h_1|\dots|h_q]g_q \cdot \gamma = [h_1|\dots|h_q]g_q\gamma \,.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Dermed virker G også fritt fra høyre på EG.

La $\mathcal{B}G = \mathcal{E}G/G$ være orbit-kategorien for denne fri G-virkningen. Det er bare ett objekt $*$ i $\mathcal{B}G$, mens hvert element $h \in G$ representerer en morfisme $h\colon * \to *$. Sammensetningen av morfismer er gitt ved multiplikasjonen i gruppen: $g \circ h = gh$.

La $BG = |\mathcal{B}G|$ være realiseringen av $\mathcal{B}G$. Da er $BG = EG/G$ orbit-rommet for den fri G-virkningen på EG. Her er BG den simplisielle mengden

$$[q] \mapsto G^q$$

med q-simplekser $[h_1|\dots|h_q]$ for $h_1,\dots,h_q \in G$, som representerer ekvivalensklassen av alle $[h_1|\dots|h_q]g_q$ i EG_q med $g_q \in G$. Fasett-avbildningene er gitt ved

$$d_i([h_1|\dots|h_q]) = \begin{cases} [h_2|\dots|h_q] & i = 0, \\ [h_1|\dots|h_i h_{i+1}|\dots|h_q] & 0 < i < q, \\ [h_1|\dots|h_{q-1}] & i = q. \end{cases}$$

Vi kaller BG (den geometriske) bar-konstruksjonen på G, eller det klassifiserende rommet til G.

La $E_*(G) = C_*(EG)$ være det (ureduserte) cellulære kjedekomplekset til den simplisielle mengden EG. Så $E_q(G) = C_q(EG) = \mathbb{Z}\{EG_q\} = \mathbb{Z}\{G^{q+1}\}$ i hver grad q. Randavbildingen $\partial_q\colon E_q(G) \to E_{q-1}(G)$ er gitt ved

$$\partial_q(x) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i d_i(x)$$

for $x \in E_q(G)$. Augmentasjonen $\epsilon\colon E_0(G) \to \mathbb{Z}$ er gitt ved $\epsilon([]g_0) = 1$ for alle $g_0 \in G$. Siden G virker fritt på EG_q er hver $E_*(G)$ en fri høyre $\mathbb{Z}[G]$-modul. Videre er

$$H_n(E_*(G)) \cong H_n(EG) \cong H_n(*) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

siden $EG \simeq *$. Dette viser at $E_*(G) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ er en fri resolusjon av $\mathbb{Z}$ i kategorien av høyre $\mathbb{Z}[G]$-moduler. Vi kaller $E_*(G)$ bar-resolusjonen for gruppen G.

La $B_*(G) = C_*(BG)$ være det cellulære kjedekomplekset til den simplisielle mengden BG. Da er $B_q(G) = C_q(BG) = \mathbb{Z}\{BG_q\} = \mathbb{Z}\{G^q\}$ i hver grad q. Randavbildningen ∂_q er gitt ved samme formel som ovenfor, dvs.

$$\partial_q([h_1|\dots|h_q]) = \\ [h_2|\dots|h_q] + \sum_{0<i<q} (-1)^i [h_1|\dots|h_i h_{i+1}|\dots|h_q] + (-1)^q [h_1|\dots|h_{q-1}]\,.$$

Fra $EG/G = BG$ følger isomorfien

$$E_*(G) \otimes_G \mathbb{Z} \cong B_*(G)\,.$$

Vi kaller $B_*(G)$ (den algebraiske) bar-konstruksjonen på G.

2. Gruppe-homologi

La M være en venstre G-modul, og N en høyre G-modul.

Gruppe-homologien til G med koeffisienter i M er definert som homologien til tensor-komplekset $E_*(G) \otimes_G M$:

$$H_n(G; M) = H_n(E_*(G) \otimes_G M) .$$

Tilsvarende er gruppe-kohomologien til G med koeffisienter i N definert som kohomologien til hom-kokomplekset $\mathrm{Hom}_G(E_*(G), N)$:

$$H^n(G; N) = H^n(\mathrm{Hom}_G(E_*(G), N) .$$

Vi skriver $H_n(G) = H_n(G; \mathbb{Z})$ og $H^n(G) = H^n(G; \mathbb{Z})$ i tilfellene hvor $\mathbb{Z}$ oppfattes som en triviell høyre- eller venstre-modul.

Fra identifikasjonen av cellulær og singulær homologi og kohomologi fås isomorfier $H_*(G) \cong H_*(BG)$ og $H^*(G) \cong H^*(BG)$. Mer generelt er det isomorfier $H_*(G; M) \cong H_*(BG; \mathcal{M})$ og $H^*(G; N) \cong H^*(BG; \mathcal{N})$ der høyresidene er gitt ved homologi og kohomologi med vridde koeffisienter, i Eilenbergs forstand.

Gitt en fri resolusjon $P_* \to \mathbb{Z}$ av $\mathbb{Z}$ i kategorien av høyre $\mathbb{Z}[G]$-moduler finnes det en kjedehomotopi-ekvivalens $E_*(G) \simeq P_*$ over $\mathbb{Z}$, som er entydig bestemt opp til kjedehomotopi. Denne induserer kanoniske isomorfier

$$H_n(G; M) = H_n(E_*(G) \otimes_G M) \cong H_n(P_* \otimes_G M)$$

og

$$H^n(G; N) = H^n(\mathrm{Hom}_G(E_*(G), N)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_G(P_*, N)) .$$

Vi kan derfor beregne $H_n(G; M)$ og $H^n(G; N)$ ved hjelp av en vilkårlig slik fri (eller projektiv) resolusjon av den trivielle G-modulen $\mathbb{Z}$. Uttrykt ved de deriverte funktorene Tor of Ext til $\otimes_G$ og Hom_G er det isomorfier

$$H_*(G; M) \cong \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

og

$$H^*(G; N) \cong \mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, N) .$$

Spesielt er $H_0(G; M) = M_G$ (koinvariantene) og $H^0(G; N) = N^G$ (invariantene) for alle G, M og N.

Eksempel 2.1. Hvis $G = \mathbb{Z}$ er $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ ringen av Laurent-polynomer i en variabel T, der T genererer $G = \mathbb{Z}$. Det finnes en kort fri resolusjon

$$0 \to \mathbb{Z}[T, T^{-1}] \xrightarrow{1-T} \mathbb{Z}[T, T^{-1}] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

med $\epsilon(T) = 1$. Så $P_q = \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ for $q = 0, 1$, og er null ellers. I dette tilfellet er en G-modul M gitt ved virkningen av T på M. Tensor-komplekset $P \otimes_G M$ er

$$0 \to M \xrightarrow{1-T} M \to 0 .$$

Så $H_0(\mathbb{Z}; M) = M_T$ (koinvarianter), $H_1(\mathbb{Z}; M) = M^T$ (invarianter) og $H_n(\mathbb{Z}; M) = 0$ for $n \neq 0, 1$. Hom-komplekset $\mathrm{Hom}_G(P_*, N)$ er

$$0 \leftarrow M \xleftarrow{1-T} M \leftarrow 0$$

så $H^0(\mathbb{Z}; M) = M^T$, $H^1(\mathbb{Z}; M) = M_T$ og $H^n(\mathbb{Z}; M) = 0$ ellers. Det er en homotopiekvivalens $B\mathbb{Z} \simeq S^1$.

Eksempel 2.2. La $G = C_m$ være den sykliske gruppen av orden m. Da er $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[T]/(T^m - 1)$ og det finnes en periodisk fri resolusjon

$$\dots \xrightarrow{1-T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-T} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

der $N = 1 + T + \dots + T^{m-1}$ kalles norm-elementet. Med trivielle koeffisienter har $P_* \otimes_G \mathbb{Z}$ formen

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

så

$$H_n(C_m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ \mathbb{Z}/m & n > 0 \text{ odde}, \\ 0 & n > 0 \text{ jevn}. \end{cases}$$

Kokomplekset $\mathrm{Hom}_G(P_*; \mathbb{Z})$ er

$$\dots \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{m} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

og

$$H^n(C_m) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ 0 & n > 0 \text{ odde}, \\ \mathbb{Z}/m & n > 0 \text{ jevn}. \end{cases}$$

Det er homotopiekvivalenser $BC_2 \simeq \mathbb{R}P^\infty$ og $BC_m \simeq L^\infty_m$ der L^∞_m er linserommet $S(\mathbb{C}^\infty)/C_m$.

Eksempel 2.3. La $X = \bigvee^k S^1$ være ettpunktsunionen av k sirkler, og la $\tilde{X} \to X$ være den universelle overdekningen. Fra van Kampens teorem er $\pi_1(X) = F_k$ den fri gruppen på k generatorer. Videre er $\tilde{X}$ en 1-sammenhengende graf, dvs. et tre, så $\tilde{X} \simeq *$. Derfor er $P_* = C_*(\tilde{X})$ en $\mathbb{Z}[F_k]$-fri resolusjon av $\mathbb{Z}$, og $H_n(P_k \otimes_{F_k} \mathbb{Z}) \cong H_n(C_*(\tilde{X}) \otimes_{\pi_1(X)} \mathbb{Z}) \cong H_n(C_*(X)) = H_n(\bigvee^k S^1)$. Så

$$H_n(F_k) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}^k & n = 1 \\ 0 & n \geq 2. \end{cases}$$

Det er en homotopiekvivalens $BF_k \simeq \bigvee^k S^1$.

Eksempel 2.4. Anta at G virker fritt på et CW-kompleks X homeomorft med en odde-dimensjonal sfære S^{2k-1}. Da er $H_n(C_*(X)) = \mathbb{Z}$ for $n = 0, 2k-1$ og 0 ellers. Komplekset

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

er eksakt, og G virker trivielt på begge $\mathbb{Z}$'ene. La $P_n = C_q(X)$ for $0 \leq q < 2k$ med $n \equiv q \bmod 2k$. Spleis kompleksene sammen, så $\partial_{2k} = \eta\epsilon$, osv. Da er P_* en G-fri resolusjon av $\mathbb{Z}$, og $H_*(G)$ kan beregnes fra $H_*(X/G)$ fordi $P_* \otimes_G \mathbb{Z}$ er spleiset sammen av kopier av $C_*(X) \otimes_G \mathbb{Z} \cong C_*(X/G)$. Spesielt er $H_n(G)$ periodisk i n, med periode $2k$.

Eksempel 2.5. La X være rommet av kvadratiske former på $\mathbb{R}^n$, identifisert med rommet av positivt definitte symmetriske $n \times n$-matriser. Dette er et konvekst åpent underrom av $\mathrm{Symm}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}}$, og derfor kontraktibelt. Den generelle lineære gruppen $GL_n(\mathbb{R})$ virker fra venstre på X ved

$$g \cdot A = gAg^T,$$

for $g \in GL_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathrm{Symm}_n(\mathbb{R})$. Virkningen er transitiv, og stabilisatoren til identitetsmatrisen (som svarer til $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2$) er den ortogonale gruppen $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Vi får en homeomorfi

$$X \cong GL_n(\mathbb{R})/O(n)\,.$$

Undergruppen $G = GL_n(\mathbb{Z}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ virker på X fra venstre. Stabilisatoren til en $x = gO(n)$ i X er

$$G_x = \{h \in GL_n(\mathbb{Z}) \mid hx = x\} = GL_n(\mathbb{Z}) \cap gO(n)g^{-1}$$

som er endelig, siden $O(n)$ er kompakt og G er diskret. Så hvis $\Gamma \subset GL_n(\mathbb{Z})$ er en torsjonsfri undergruppe virker Γ fritt på X. Dermed er $X/\Gamma \simeq B\Gamma$, og $H_*(\Gamma) \cong H_*(X/\Gamma)$.

Kjernen $\Gamma(N)$ til homomorfien $GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}/N)$ kalles den prinsipale kongruensundergruppen av nivå N, og er torsjonsfri for alle $N \geq 3$. Gruppen $\Gamma(2)$ har bare 2-torsjon.

Eksempel 2.6. La X_0 være rommet av kvadratiske former på $\mathbb{R}^n$ opp til skalarmultiplikasjon, dvs. vi identifiserer $q \sim \lambda q$ for $\lambda > 0$. Det er en fibrering $X \to X_0$ med fiber $(0, \infty)$, så $X_0 \cong \mathbb{R}^{\binom{n+1}{2}-1}$ og

$$X_0 \cong SL_n(\mathbb{R})/SO(n)\,.$$

I tilfellet $n = 2$ kan $X_0 = SL_2(\mathbb{R})/SO(2)$ identifiseres med det hyperbolske plan, eller øvre komplekse halvplan

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

med virkningen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Isotropien i $z = i$ er $SO(2)$.

3. Funktorielle egenskaper

En gruppehomomorfi $\phi\colon H \to G$ induserer en avbildning $B\phi\colon BH \to BG$ og en homomorfi $\phi_*\colon B_*(H) \to B_*(G)$ av kjedekomplekser. Denne tar $[h_1|\dots|h_q] \in B_q(H)$ til $[\phi(h_1)|\dots|\phi(h_q)] \in B_q(G)$. Dette gir naturlige homomorfier i gruppehomologi og -kohomologi:

$$\phi_*\colon H_n(H) \to H_n(G)$$
$$\phi^*\colon H^n(G) \to H^n(H)$$

for alle n.

Shapiros Lemma 3.1. *Hvis $H \subseteq G$, M er en venstre H-modul og N er en høyre H-modul, så er $\mathrm{ind}_H^G(M) = \mathbb{Z}[G] \otimes_H M$ en venstre G-modul og $\mathrm{coind}_H^G = \mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}[G], N)$ en høyre G-modul, og det er naturlige isomorfier*

$$H_n(H; M) \cong H_n(G; \mathrm{ind}_H^G(M))$$
$$H^n(H; N) \cong H^n(G; \mathrm{coind}_H^G(N))$$

for alle n.

Bevis. Det er en isomorfi $E_*(G) \otimes_G \mathrm{ind}_H^G(M) \cong E_*(G) \otimes_H M$, og $E_*(G) \to \mathbb{Z}$ kan oppfattes som en resolusjon av fri H-moduler. Den kan derfor brukes til å beregne $H_*(H; M)$. I kohomologi brukes en isomorfi $\mathrm{Hom}_G(E_*(G), \mathrm{coind}_H^G(N)) \cong \mathrm{Hom}_H(E_*(G), N)$. □

Sats 3.2. *Konjugasjon med et element $\gamma \in G$ definerer en indre automorfi $\phi\colon G \to G$, dvs. $\phi(g) = \gamma g \gamma^{-1}$. Den induserte kjedeavbildningen $\phi_*\colon B_*(G) \to B_*(G)$ er kjedehomotop til identiteten, så indre automorfier induserer identiteten på homologi og kohomologi.*

Bevis. Multiplikasjon med γ fra venstre definerer en funktor $\gamma\cdot\colon \mathcal{E}G \to \mathcal{E}G$, som tar morfismen $h\colon g \to hg$ til $\phi(h) = \gamma h \gamma^{-1}\colon \gamma g \to \gamma h g$. Morfismene $\gamma\colon g \to \gamma g$ definerer en naturlig transformasjon η fra identiteten på $\mathcal{E}G$ til $\gamma\cdot$.

Disse er kompatible med den fri høyrevirkningen på $\mathcal{E}G$. På orbitkategorien $\mathcal{B}G$ induserer $\gamma\cdot$ funktoren $\phi\colon h \mapsto \gamma h \gamma^{-1}$, og η induserer en naturlig transformasjon fra identiteten på $\mathcal{B}G$ til ϕ. Altså er $B\phi$ homotop til identiteten på BG, og ϕ_* er kjedehomotop til identiteten på $B_*(G)$. □

Det følger at hvis H er normal i G, og G virker på H ved konjugasjon, så virker G på $H_n(H)$ og $H^n(H)$ gjennom funktorialiteten, og virkningen restriktert til H er triviell. Derfor induseres en virkning av kvosientgruppen G/H på $H_n(H)$ og $H^n(H)$.

Hvis $\phi\colon H \subset G$ har endelig indeks, finnes det transfer-homomorfier

$$\phi^!\colon H_n(G) \to H_n(H)$$
$$\phi_!\colon H^n(H) \to H^n(G)$$

i motsatt retning av de naturlige homomorfiene ϕ_* og ϕ^*.

La $N = \sum_{g \in G/H} g \in \mathbb{Z}[G/H] \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_H \mathbb{Z}$ være summen av restklassene i G/H. Det er en venstre G-modul homomorfi $N\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G/H]$, som tar 1 til N. Denne induserer en kjedeavbildning

$$B_*(G) = E_*(G) \otimes_G \mathbb{Z} \xrightarrow{1 \otimes N} E_*(G) \otimes_G \mathbb{Z}[G/H] \cong E_*(G) \otimes_H \mathbb{Z}\,.$$

som vi også kaller N. Videre er det en kjedehomotopiekvivalens $E_*(G) \otimes_H \mathbb{Z} \simeq B_*(H)$, som er entydig opp til kjedehomotopi. Da er $\phi^!$ den sammensatte avbildningen

$$\phi^!\colon H_n(G) = H_n(B_*(G)) \xrightarrow{N_*} H_n(E_*(G) \otimes_H \mathbb{Z}) \cong H_n(B_*(H)) = H_n(H)\,.$$

Fra et geometrisk synspunkt er det et overdekningsrom $\pi\colon EG/H \to EG/G = BG$ med fiber G/H. Hver q-celle σ i BG tillater en løftning til EG/H, for hvert punkt i fiberen G/H. La $N\colon C_*(BG) \to C_*(EG/H)$ være kjedeavbildningen som sender σ til summen av disse $[G : H]$ løftningene. Det er en homotopiekvivalens $BH \to EG/H$, og $\phi^!$ er den sammensatte homomorfien

$$\phi^!\colon H_n(G) = H_n(C_*(BG)) \xrightarrow{N_*} H_n(C_*(EG/H)) = H_n(EG/H) \cong H_n(BH)\,.$$

Her er det lett å se at sammensetningen $\phi_*\phi^!$ er multiplikasjon med indeksen $[G : H]$ til H i G.

Sats 3.3. *La G være en gruppe, $\phi\colon H \subset G$ en undergruppe av endelig indeks $d = [G : H]$, M en venstre G-modul og N en høyre G-modul. Sammensetningene*

$$H_n(G;M) \xrightarrow{\phi^!} H_n(H;M) \xrightarrow{\phi_*} H_n(G;M)$$
$$H^n(G;N) \xrightarrow{\phi^*} H^n(H;N) \xrightarrow{\phi_!} H^n(G;N)$$

er begge multiplikasjon med d.

Dersom multiplikasjon med d på M er invertibel, så er $H_*(G;M)$ en direkte summand av $H_*(H;M)$. Dersom multiplikasjon med d på N er invertibel, så er $H^*(G;N)$ en direkte summand av $H^*(H;N)$.

Hvis G er av endelig orden g, så er g en eksponent for hver $H_n(G;M)$ og $H^n(G;N)$ med $n \neq 0$.

Hvis p er et primtall og H er en p-Sylow undergruppe i G, så er $H_*(G)_{(p)}$ en direkte summand i $H_*(H)_{(p)}$, og $H^*(G)_{(p)}$ er en direkte summand i $H^*(H)_{(p)}$.

Eksempel 3.4. La $\mathbb{F}_q$ være en endelig kropp av karakteristikk p. Tits bygningen $B_k(\mathbb{F}_q)$ er realiseringen av kategorien av ekte, ikke-trivielle underrom av $\mathbb{F}_q^k$, og inklusjoner mellom slike. Ved Solomon–Tits teoremet er $B_k(\mathbb{F}_q)$ homotopiekvivalent med en ett-punkts union (wedge) av sfærer, alle av dimensjon $(k-2)$.

Steinberg-representasjonen $St_k(\mathbb{F}_q)$ er definert som $\tilde{H}_{k-2}(B_k(\mathbb{F}_q))$. Gruppen $GL_k(\mathbb{F}_q)$ virker på $B_k(\mathbb{F}_q)$ gjennom dens virkning på underrom av $\mathbb{F}_q^k$, og dermed på $St_k(\mathbb{F}_q)$. Steinberg-representasjonen er altså en $GL_k(\mathbb{F}_q)$-modul.

La $P \subset GL_k(\mathbb{F}_q)$ være p-Sylow undergruppen av strengt øvretriangulære matriser. Restriktert til P er Steinberg-representasjonen isomorf med den regulære representasjonen $\mathbb{Z}[P]$. Så

$$H_n(P; St_k(\mathbb{F}_q)) \cong H_n(P; \mathbb{Z}[P]) \cong H_n(1; \mathbb{Z})$$

er $\mathbb{Z}$ for $n = 0$ og 0 ellers, ved Shapiros lemma 3.1. Etter p-lokalisering er derfor

$$H_n(GL_k(\mathbb{F}_q); St_k(\mathbb{F}_q))_{(p)} = 0$$

for alle $n > 0$.

Fra Quillens rang-filtrasjon i algebraisk K-teori følger fra dette at

$$K_n(\mathbb{F}_q)_{(p)} = 0$$

for $n > 0$. Den algebraiske K-teorien til en endelig kropp er altså triviell etter lokalisering ved karakteristikken.

4. Pushout og amalgamert produkt

La G_0, G_1 og G_2 være grupper, med injektive homomorfier $\alpha_1\colon G_0 \to G_1$ og $\alpha_2\colon G_0 \to G_2$. Det amalgamerte produktet

$$G = G_1 *_{G_0} G_2$$

er pushout i kategorien av grupper av diagrammet

$$G_1 \xleftarrow{\alpha_1} G_0 \xrightarrow{\alpha_2} G_2\,.$$

La X være pushout i kategorien av rom av det induserte diagrammet

$$BG_1 \leftarrow BG_0 \rightarrow BG_2\,.$$

Så $X = BG_1 \cup_{BG_0} BG_2$. Avbildningene her er kofibreringer, så X er homotopiekvivalent til homotopipushout av det samme diagrammet, dvs.

$$BG_1 \cup (BG_0 \times I) \cup BG_2\,.$$

Sats 4.1 (J.H.C. Whitehead). *La $G = G_1 *_{G_0} G_2$. Den naturlige avbildningen*

$$BG_1 \cup_{BG_0} BG_2 \xrightarrow{\simeq} BG$$

er en homotopiekvivalens. Det er en lang eksakt sekvens

$$\cdots \to H_n(G_0) \xrightarrow{\alpha_1 \oplus \alpha_2} H_n(G_1) \oplus H_n(G_2) \to H_n(G) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(G_0) \to \dots\,.$$

Bevis. Rommet X er sammenhengende, og ved van Kampens teorem er $\pi_1(X) \cong G$. La $\pi\colon \tilde{X} \to X$ være den universelle overdekningen til X, og la $X_i = \pi^{-1}(BG_i) = BG_i \times_X \tilde{X}$ være pullback av $\tilde{X}$ over $BG_i \subset X$. Siden $BG_i \to X$ induserer en injeksjon $G_i \to G$ av fundamentalgrupper er overdekningen X_i av BG_i en disjunkt union av kontraktible rom. Så $\tilde{X} = X_1 \cup_{X_0} X_2$ har homotopitypen til en graf, og er 1-sammenhengende. Det følger at $\tilde{X}$ er kontraktibel, så $X \simeq BG$. □

Eksempel 4.2. (Sammenlign med eksempel 2.6.) Det finnes et tre $T \subset X_0 \cong \mathcal{H}$ som bevares under virkningen av $G = SL_2(\mathbb{Z})$. En kant AB i treet er et fundamentalområde for virkningen, og avbildes isomorft på orbitrommet T/G. Stabilisatoren til A er syklisk av orden 4 generert av $t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, stabilisatoren til B er syklisk av orden 6 generert av $s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, og stabilisatoren til AB er syklisk av orden 2 generert av $t^2 = s^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Det følger at

$$SL_2(\mathbb{Z}) \cong C_4 *_{C_2} C_6$$

er et amalgamert produkt av grupper. Det er eksakte sekvenser

$$0 \to H_{2i}(SL_2(\mathbb{Z})) \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/6 \to H_{2i-1}(SL_2(\mathbb{Z})) \to 0$$

for $i \geq 1$. Her er $\alpha_2\colon \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/6$ splitt injektiv, så $\partial = 0$ og

$$H_n(SL_2(\mathbb{Z})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ \mathbb{Z}/12 & n > 0 \text{ odde}, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

5. Lave grader

Det er isomorfier $H_0(G;M) \cong G_M$, $H_1(G) \cong G^{ab} = G/[G,G]$ og $H^0(G;N) \cong N^G$.

Gruppen $H^1(G;N)$ er isomorf med kvosientgruppen

$$\mathrm{Der}(G,N)/P(G,N)$$

av derivasjoner $G \to N$, modulo de prinsipale derivasjonene. Det er en bijeksjon mellom $\mathrm{Der}(G,N)/P(G,N)$ og N-konjugasjonsklasser av splittinger av den splittbare ekstensjonen

$$0 \to N \to N \rtimes G \to G \to 0\,.$$

Det er en bijeksjon mellom $H^2(G;N)$ og ekvivalensklassene av ekstensjoner

$$0 \to N \to E \to G \to 0$$

hvor $G = E/N$ virker på N ved konjugasjon.

6. Produkter

(Diagonal $B_*(G) \to B_*(G) \otimes B_*(G)$, cup produkt, Hopf algebra struktur på $H_*(G;k)$ og $H^*(G;k)$.)

$H^*(C_m;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[y]/(my = 0)$ med $\deg(y) = 2$.

$$H^*(C_{p^e};\mathbb{F}_p) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2[x] & p = 2 \text{ og } e = 1, \\ \Lambda(x) \otimes \mathbb{F}_p[y] & \text{ellers.} \end{cases}$$

Her er $\deg(x) = 1$ og $\deg(y) = m$.

7. Spektralsekvenser

(Hochschild–Serre, Cartan–Leray)

La G virke cellulært på et asyklisk CW-kompleks X. La X_p være p-cellene i X, og la Σ_p være en mengde representanter for X_p/G. Det er en spektralsekvens

$$E^1_{pq} = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} H_q(G_\sigma; M_\sigma) \Longrightarrow H_{p+q}(G;M)\,.$$

Her er $G_\sigma \subseteq G$ stabilisatoren til σ, og M_σ er G-representasjonen M restriktert til G_σ, tensor orienteringsrepresentasjonen for virkningen av G_σ på cellen σ.