TOPOLOGISK K-TEORI OG BOTT PERIODISITET

John Rognes

8. mai 2003

0. Ikke-kommutative rom og bunter

Ved Gelfand–Naimark korrespondansen svarer det et kompakt Hausdorff rom X til enhver kommutativ C^*-algebra A, med $A \cong C(X) = \mathrm{Map}(X, \mathbb{C})$, og ikke-kommutativ geometri handler om de generaliserte "rom" som kan tenkes å svare til ikke-kommutative C^*-algebraer.

Ved Serre–Swan teoremet svarer det en (kompleks) vektorbunt $E \to X$ til hver endelig-generert projektiv $C(X)$-modul P, med $P \cong \Gamma(E)$ lik seksjonene i $E \to X$. I ikke-kommutativ geometri svarer derfor endelig-genererte projektive moduler over en ikke-kommutativ C^*-algebra A til generaliserte vektorbunter over det generaliserte rommet som svarer til A.

La $\mathcal{E}$ være en C^*-modul over en C^*-algebra A, la $\mathrm{End}_A^{00}(\mathcal{E})$ være idealet i $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ av A-endelig-rang operatorer på $\mathcal{E}$, og la dets norm-tillukning $\mathrm{End}^0(\mathcal{E})$ være de A-kompakte operatorene. La $\mathcal{H}_A$ være C^*-modulen over A av følger $(a_k)_{k=0}^\infty$ i A med rekken $\sum_{k=0}^\infty a_k^* a_k$ konvergent i A.

For en unital C^*-algebra A svarer endelig-genererte projektive A-moduler P til C^*-moduler $\mathcal{E}$ over A på formen $\mathcal{E} = p\mathcal{H}_A$ der p er en A-kompakt projeksjon (= selvadjungert idempotent) på $\mathcal{H}_A$, som igjen svarer til C^*-moduler $\mathcal{E}$ over A slik at identiteten på $\mathcal{E}$ er en A-kompakt operator. Dette gir tre ekvivalente modeller for de ikke-kommutative vektorbuntene over det ikke-kommutative rommet som svarer til A, uttrykt enten ved algebraiske moduler, eller ved projeksjoner, eller ved C^*-moduler.

1. Kohomologi og K-teori

I algebraisk topologi, f.eks. som et verktøy for geometrisk topologi, studeres topologiske rom mest effektivt ved hjelp av *kohomologi-teorier*. Disse er kontravariante funktorer E^* som tar topologiske rom til graderte abelske grupper. Viktige eksempler på slike er singulær kohomologi H^*, og topologisk K-teori K^*. Geometrisk sett er K-teori bygget fra vektorbunter, mens kohohomologi er bygget fra differensial-former. Algebraisk er K-teori bygget fra moduler og idealer, mens kohomologi er bygget fra divisorer. Aritmetisk er K-teori bygget fra idealer mens kohomologi er bygget fra prim-idealer, eller valuasjoner. I hvert tilfelle er det en naturlig transformasjon fra K-teori til kohomologi, som arter seg som en Chern karakter, en spor-avbildning, eller en prim-faktorisering.

Tilsvarende ønsker man å utvikle kohomologi-teorier for ikke-kommutative geometriske objekter. Disse blir kovariante funktorer som tar C^*-algebraer til graderte

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

abelske grupper. Quillen's algebraiske K-teori av ringer realiserer denne utvidelsen for K-teori, som vi snart skal se nærmere på. For kohomologi av en glatt mangfoldigheter M sier Hochschild–Kostant–Rosenberg teoremet at for $A = C^\infty(M)$ er Hochschild-homologigruppene $HH_k(A)$ isomorfe med differensial-formene $\Omega^k(M)$. Connes' B-operator på Hochschild-homologi motsvarer randoperatoren d på former, så Connes' sykliske homologi $HC_*(A)$ er isomorf med deRham-kohomologigruppene $H^*_{dR}(M)$ til M. Connes' sykliske homologi av ringer realiserer så utvidelsen til ikke-kommutative rom for kohomologi.

Spor-avbildningen $K_*(A) \to HC_*(A)$ generaliserer Chern-karakteren til ringer. For "vidunderlige nye ringer," eller S-algebraer, finnes det også en videre generalisering av K-teori, syklisk homologi generaliseres til Bökstedt, Hsiang og Madsens topologiske sykliske homologi (TC), og spor-avbildningen erstattes av syklotom-sporet.

2. Kohomologi-teorier

Et *basert rom* er et topologisk rom X utstyrt med et basispunkt $x_0 \in X$. En *basert avbildning* mellom baserte rom (X, x_0) og (Y, y_0) er en kontinuerlig avbildning $f\colon X \to Y$ med $f(x_0) = y_0$.

Anta inntil videre at alle rom X, Y etc. er endelige CW-komplekser (evnt. kompakte Hausdorff rom). Dette er de rommene som kan bygges opp i endelig mange trinn ved å feste på n-celler på formen D^n langs en avbildning fra randen $S^{n-1} \subset D^n$ til cellene av dimensjon $< n$. Eksempler: simplisialkomplekser, mangfoldigheter.

Definisjon. En *redusert kohomologi-teori* $\widetilde{E}^*$ tilordner til hvert basert rom X en gradert abelsk gruppe $\widetilde{E}^*(X)$, dvs. en følge av abelske grupper $\widetilde{E}^n(X)$ for $n \in \mathbb{Z}$, og til hver basert avbildning $f\colon X \to Y$ en homomorfi $f^*\colon \widetilde{E}^*(Y) \to \widetilde{E}^*(X)$, dvs. en følge av gruppe-homomorfier $f^*\colon \widetilde{E}^n(Y) \to \widetilde{E}^n(X)$ for $n \in \mathbb{Z}$. Tilordningen utgjør en *kontravariant funktor*, dvs. identitetsavbildningen $id\colon X \to X$ induserer identitetshomomorfien $id^*\colon \widetilde{E}^*(X) \to \widetilde{E}^*(X)$, og hvis $g\colon Y \to Z$ er en basert avbildning så er $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon \widetilde{E}^*(Z) \to \widetilde{E}^*(X)$.

Videre skal $\widetilde{E}^*$ være *homotopi-invariant*, dvs. hvis $f, g\colon X \to Y$ er homotope som baserte avbildninger så er $f^* = g^*\colon \widetilde{E}^*(Y) \to \widetilde{E}^*(X)$. (Det følger at dersom $f\colon X \to Y$ er en homotopi-ekvivalens, så er f^* en isomorfi.)

Så skal $\widetilde{E}^*$ være *halv-eksakt*, dvs. hvis $A \subset X$ er et under-CW-kompleks (evnt. et lukket underrom) med kvotientrom $X/A = X \cup_A *$, så induserer avbildningene $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A$ en eksakt sekvens

$$\widetilde{E}^*(X/A) \xrightarrow{j^*} \widetilde{E}^*(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{E}^*(A)\,,$$

dvs. bildet av j^* er lik kjernen til i^*.

Til sist skal det være en naturlig *suspensjons-isomorfi*

$$\sigma\colon \widetilde{E}^n(X) \cong \widetilde{E}^{n+1}(\Sigma X)$$

for hvert rom X og for hver $n \in \mathbb{Z}$. Her er $\Sigma X = X \wedge S^1 \cong CX \cup_X CX$ *suspensjonen* av X, der $CX = X \wedge I$ er *kjeglen* på X, og naturlighet betyr at σ kommuterer med f^* for hver basert avbildning $f\colon X \to Y$.

Avbildningen $j\colon X \to X/A$ kan faktoriseres som

$$X \xrightarrow{j'} X \cup_A CA \underset{\simeq}{\xrightarrow{h}} X/A$$

der $C_i = X \cup_A CA$ er *avbildningskjeglen* til $i\colon A \to X$, $j'\colon X \to C_i$ er inklusjonen av et under-CW-kompleks, og $h\colon C_i \to X/A$ kollapser det kontraktible underrommet CA til et punkt, og er en homotopi-ekvivalens. Det er derfor en isomorfi

$$h^*\colon \widetilde{E}^*(X/A) \xrightarrow{\cong} \widetilde{E}^*(C_i)\,.$$

Kvotienten av j' er $C_i/X \cong CA/A \cong \Sigma A$, så avbildningene $X \xrightarrow{j'} C_i \xrightarrow{k} \Sigma A$ induserer en eksakt sekvens

$$\widetilde{E}^*(X) \xleftarrow{j'^*} \widetilde{E}^*(C_i) \xleftarrow{k^*} \widetilde{E}^*(\Sigma A)\,.$$

Ved å sette sammen h^*, k^* og suspensjons-isomorfien σ får vi en *forbindelses-homomorfi*

$$\delta = (h^*)^{-1} \circ k^* \circ \sigma\colon \widetilde{E}^n(A) \to \widetilde{E}^{n+1}(X/A)$$

for $n \in \mathbb{Z}$. Dette argumentet kan føres litt videre, og så kan de ulike eksakte sekvensene settes sammen til en *lang eksakt sekvens*

$$\dots \xrightarrow{i^*} \widetilde{E}^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{E}^n(X/A) \xrightarrow{j^*} \widetilde{E}^n(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{E}^n(A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{E}^{n+1}(X/A) \xrightarrow{j^*} \dots$$

for $n \in \mathbb{Z}$. Denne er eksakt i hver posisjon, dvs. bildet av i^* er lik kjernen til δ, bildet av j^* er lik kjernen til i^* og bildet av δ er lik kjernen til j^*. Dersom f.eks. $\widetilde{E}^*(A)$, $\widetilde{E}^*(X/A)$ og δ er kjent så bestemmer dette nesten $\widetilde{E}^*(X)$, i og med at det er en ekstensjon av abelske grupper

$$0 \to \mathrm{cok}(\delta) \to \widetilde{E}^n(X) \to \ker(\delta) \to 0\,.$$

for hver n. Disse formelle egenskapene gjør at en kohomologi-teori $\widetilde{E}^*(X)$ er essensielt beregnbar for rom X som er beskrevet som CW-komplekser, bare verdiene $\widetilde{E}^*(S^n)$ er kjent for sfærene S^n.

(En redusert kohomologi-teori kan entydig utvides til uendelige CW-komplekser, eller vilkårlige topologiske rom, dersom en antar to ytterligere aksiomer, nemlig at den naturlige homomorfien

$$\widetilde{E}^*(\bigvee_\alpha X_\alpha) \to \prod_\alpha \widetilde{E}^*(X_\alpha)$$

er en isomorfi for vilkårlige familier av rom $(X_\alpha)_\alpha$, og at $f^*\colon \widetilde{E}^*(Y) \to \widetilde{E}^*(X)$ er en isomorfi dersom $f\colon X \to Y$ er en svak homotopi-ekvivalens.)

En redusert kohomologi-teori $\widetilde{E}^*$ gir opphav til en uredusert kohomologi-teori E^* definert for rom X uten basispunkt, ved formelen

$$E^*(X) = \widetilde{E}^*(X_+)$$

der X_+ er den disjunkte unionen av X og et basis-punkt. Tilsvarende for avbildninger $f\colon X \to Y$ mellom rom uten basispunkt.

Omvendt gir en uredusert kohomologi-teori E^* opphav til en redusert kohomologi-teori $\widetilde{E}^*$ definert for baserte rom (X, x_0), ved formelen

$$\widetilde{E}^*(X) = \ker(i^*\colon E^*(X) \to E^*(\{x_0\}))$$

der $i\colon \{x_0\} \to X$ er inklusjonen. Merk at kollaps-avbildningen $c\colon X \to \{x_0\}$ oppfyller $c \circ i = id$, så $i^* \circ c^* = id^*$ er identiteten, dvs. i^* er kanonisk splitt surjektiv.

På denne måten kan vi gå frem og tilbake mellom reduserte og ureduserte kohomologi-teorier, etter som vi ønsker.

3. Halv-eksakte funktorer

For hver abelsk gruppe G definerer redusert singulær kohomologi med koeffisienter i G en redusert kohomologi-teori med $E^*(X) = H^*(X; G)$. Vi skal se at topologisk K-teori også definerer en uredusert kohomologi-teori med $E^*(X) = K^*(X)$, slik at $K^0(X) = K(X)$ er Grothendieck-gruppen til den abelske monoiden av vektorbunter over X. Dette er nok til å definere de negative K-kohomologigruppene

$$\widetilde{K}^{-m}(X) = \widetilde{K}(\Sigma^m X)$$

der $\Sigma^m X = \Sigma(\Sigma^{m-1} X) \cong X \wedge S^m$ er den m-te itererte suspensjonen på X. Men dette virker bare for $m \geq 0$. For å definere $K^n(X)$ for $n > 0$ trenger vi Bott periodisitet.

Blant aksiomene for en kohomologi-teori er det bare suspensjons-isomorfien som relaterer gruppene $\widetilde{E}^n(X)$ for ulike n. Som et trinn på vei mot en kohomologi-teori kan vi derfor studere en fiksert grad, f.eks. $n = 0$, og bare studere den kontravariante homotopi-invariante halv-eksakte funktoren $\widetilde{E} = \widetilde{E}^0$.

Gitt en slik (kontravariant homotopi-invariant) halv-eksakt funktor $\widetilde{E}$ kan vi for $m \geq 0$ definere $\widetilde{E}^{-m}(X) = \widetilde{E}(\Sigma^m X)$. Dette gir den delen av en redusert kohomologi-teori $\widetilde{E}^*$ der $* \leq 0$, som oppfyller kravene om kontravarians, homotopi-invariants, halv-eksakthet og suspensjons-isomorfien i grader $* \leq 0$. Det følger også at man har "halvparten" av den lange eksakte sekvensen

$$\dots \xrightarrow{\delta} \widetilde{E}^{-1}(X/A) \xrightarrow{j^*} \widetilde{E}^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{E}^{-1}(A) \xrightarrow{\delta} \widetilde{E}^{0}(X/A) \xrightarrow{j^*} \widetilde{E}^{0}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{E}^{0}(A)$$

men det er ikke generelt slik at det finnes noen utvidelse av $\widetilde{E}^n$ til positive n.

4. Topologisk K-teori

La X være et endelig CW-kompleks (evnt. et kompakt Hausdorff rom). Vi skriver $\mathrm{Vect}_n(X)$ for mengden av isomorfi-klasser av n-dimensjonale komplekse vektorbunter over X, og $\mathrm{Vect}(X)$ for mengden av isomorfi-klasser av vilkårlige komplekse vektorbunter over X. Dersom X er sammenhengende er $\mathrm{Vect}(X) = \coprod_{n \geq 0} \mathrm{Vect}_n(X)$. Whitney sum og tensor produkt av vektorbunter gjør $\mathrm{Vect}(X)$ til en kommutativ semi-ring.

Definisjon. La $K(X) = G(\mathrm{Vect}(X))$ være Grothendieck-gruppen til den abelske monoiden $\mathrm{Vect}(X)$, med hensyn på Whitney sum. Tensor-produktet på $\mathrm{Vect}(X)$ induserer en kommutativ ring-struktur på $K(X)$.

En avbildning $f \colon X \to Y$ induserer en ring-homomorfi $f^* \colon K(Y) \to K(X)$ som tar isomorfi-klassen til en vektorbunt $E \to Y$ til isomorfi-klassen til pullback-bunten $f^*E \to X$.

Proposisjon. *Tilordningen $X \mapsto K(X)$ er en uredusert kontravariant, homotopi-invariant halv-eksakt funktor.*

Pullback langs homotope avbildninger $f, g \colon X \to Y$ gir isomorfe bunter $f^*E \cong g^*E$, som medfører homotopi-invarians. Det essensielle ved halv-eksakthet er å vise at hvis $E \to X$ har triviell restriksjon $E_A \to A$ til et under-CW-compleks $A \subset X$, så er E isomorf med et tilbaketrekk $j^*(E/\sim)$. Her er $(E/\sim) \to X/A$ gitt ved å bruke trivialiseringen over A til å kollapse E_A til en enkelt fiber.

Gitt vektorbunter $E \to X$ og $F \to Y$ er det *eksterne tensorproduktet* $E * F \to X \times Y$ gitt som den interne tensorproduktet over $X \times Y$ av p^*E og q^*F, der $p\colon X \times Y \to X$ og $q\colon X \times Y \to Y$ er projeksjonene. Dette definerer en paring

$$K(X) \otimes K(Y) \xrightarrow{*} K(X \times Y)\,.$$

For baserte rom X og Y lar vi $X \vee Y = (X \times y_0) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$ væe wedge-summen av X og Y, og

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}$$

er smash-produktet av X og Y. Det er da enkelt å vise at paringen ovenfor løfter til en paring

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \xrightarrow{*} \widetilde{K}(X \wedge Y)\,.$$

La $S^2 = D^2_+ \cup_{S^1} D^2_-$ være 2-sfæren.

Produkt-teoremet. *Ring-homomorfien*

$$K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{*} K(X \times S^2)$$

er en isomorfi.

5. Klem-funksjoner

La $E \to S^2$ være en $\mathbb{C}^n$-bunt. Restriksjonene $E_\pm \to D^2_\pm$ er trivialiserbare, siden $D^2_\pm$ er kontraktibel. Velg slike trivialiseringer

$$\theta_\pm\colon E_\pm \xrightarrow{\cong} D^2_\pm \times \mathbb{C}^n\,.$$

Over $S^1 = D^2_+ \cap D^2_-$ kan vi sammenlikne de to trivialiseringene

$$f = \theta_- \circ \theta_+^{-1}\colon S^1 \times \mathbb{C}^n \underset{\cong}{\xleftarrow{\theta_+}} E_+|S^1 = E_-|S^1 \underset{\cong}{\xrightarrow{\theta_-}} S^1 \times \mathbb{C}^n\,.$$

Her er $f\colon S^1 \times \mathbb{C}^n \to S^1 \times \mathbb{C}^n$ en buntisomorfi over S^1. Vi kan skrive

$$f(z, v) = (z, g(z) \cdot v)$$

for $z \in S^1$, $v \in \mathbb{C}^n$ der

$$g\colon S^1 \to U(n) \simeq GL_n(\mathbb{C})\,.$$

Vi kaller f (eller g) en *klemfunksjon* (clutching function) for $E \to S^2$. Omvendt kan vi rekonstruere $E \to S^2$ fra f (eller g) som unionen

$$(D^2_+ \times \mathbb{C}^n) \cup_f (D^2_- \times \mathbb{C}^n) \cong E$$

over $D^2_+ \cup_{S^1} D^2_- \cong S^2$. Vi kan skrive $[\mathbb{C}^n, f]$ for konstruksjonen til venstre.

Homotope klemfunksjoner gir isomorfe vektorbunter, og tilordningen $g \mapsto f \mapsto [\mathbb{C}^n, f]$ gir en bijeksjon

$$[S^1, U(n)] \cong \mathrm{Vect}_n(S^2)\,.$$

Vi har

$$[S^1, U(n)] \cong \pi_1 U(n) \cong \begin{cases} 0 & \text{for } n = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{for } n > 0. \end{cases}$$

For det er en splitt fibrering

$$SU(n) \to U(n) \xrightarrow{\det} S^1$$

med $SU(n)$ enkelt-sammenhengende, så for $n \geq 1$ er $\det_* \colon \pi_1 U(n) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ en isomorfi.

For $n = 1$ kan vi identifisere $S^1 = U(1) \subset GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Den trivielle funksjonen $g(z) = 1$ svarer til identitetsavbildningen f på $S^1 \times \mathbb{C}^1$, så $[\mathbb{C}^1, 1]$ er den trivielle linjebunten $1 \colon S^2 \times \mathbb{C}^1 \to S^2$. Identitetsfunksjonen $g(z) = z$ svarer til ekvivalensen $f(z, v) = (z, zv)$, og den assosierte komplekse linjebunten $[\mathbb{C}^1, z] = H$ kalles *Hopf linjebunten*, og er lik den tautologiske linjebunten over $S^2 = \mathbb{C}P^1 = Gr_1(\mathbb{C}^2)$.

Klemfunksjonen $g(z) = z^k$ svarer til tensor-potensen $[\mathbb{C}^1, z^k] = H^k = H \otimes \cdots \otimes H$ (k faktorer). (Kan utvides til negative H, med $g(z) = z^{-1} = \bar{z}$ svarende til den duale bunten H^*.)

Det er en isomorfi av $\mathbb{C}^2$-bunter $H \otimes H \oplus 1 \cong H \oplus H$, siden de tilhørende klemfunksjonene $g_1, g_2 \colon S^1 \to U(2)$:

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$g_2(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

er homotope.

Det følger at semi-ringen $\mathrm{Vect}(S^2)$ er generert av 1 og H, med relasjonen $H^2 + 1 = 2H$, eller ekvivalent, $(1 - H)^2 = 0$. Gruppekomplettering gir:

Proposisjon. *Ring-homomorfien*

$$\mathbb{Z}[H]/(1 - H)^2 \to K(S^2)$$

er en isomorfi. Så $K(S^2) \cong \mathbb{Z}\{1, H\}$ *som abelsk gruppe.*

Mer generelt kan man analysere en $\mathbb{C}^n$-bunt $E \to \Sigma X = C_+X \cup_X C_-X$ ved å velge trivialiseringer av restriksjonene $E_\pm \to C_\pm X \subset \Sigma X$, og å sammenligne trivialiseringene over snittet $X = C_+X \cap C_-X$. Dette gir en klemfunksjon som er en bunt-isomorfi

$$f \colon X \times \mathbb{C}^n \to X \times \mathbb{C}^n$$

over X, og som svarer til en avbildning $g \colon X \to U(n) \simeq GL_n(\mathbb{C})$. Det er så en bijeksjon

$$[X, U(n)] \cong \mathrm{Vect}_n(\Sigma X)\,.$$

La $U = \bigcup_n U(n)$. Da blir gruppekompletteringene

$$[X, U] \cong \widetilde{K}(\Sigma X) \cong \widetilde{K}^{-1}(X)\,.$$

Dette motiverer en algebraisk definisjon av $\widetilde{K}^{-1}(X)$ via ekvivalensklasser av klemfunksjoner $X \to U = \bigcup_n U(n)$.

Et bevis av produkt-teoremet begynner som følger. Enhver $\mathbb{C}^n$-bunt $F \to X \times S^2$ oppstår fra en klemfunksjon $f\colon E \times S^1 \to E \times S^1$, der $E \to X$ er en $\mathbb{C}^m$-bunt og f er en fibervis ekvivalens over $X \times S^1$. For la E være restriksjonen til F over $X \times *$, der $*$ er et basispunkt i $S^1 \subset S^2$. Da er restriksjonene $F_\pm$ av F til $X \times D^2_\pm$ isomorfe med produktbuntene $E \times D^2_\pm \to X \times D^2_\pm$. Ved å sammenligne isomorfiene over snittet $X \times S^1$ får vi en bunt-isomorfi

$$f\colon E \times S^1 \xrightarrow{\cong} E \times S^1$$

over $X \times S^1$, som er den nevnte klemfunksjonen. Vi rekonstruerer F som

$$(E \times D^2_+) \cup_f (E \times D^2_-) \cong F$$

over $(X \times D^2_-) \cup_{X \times S^1} (X \times D^2_+) \cong X \times S^2$. Vi skriver $[E, f]$ for denne $\mathbb{C}^m$-bunten over $X \times S^2$.

Vi skriver $f = 1$ for identitetsavbildningen $f(e, z) = (e, z)$ for $e \in E$, $z \in S^1$, og $f = z$ for ekvivalensen med $f(e, z) = (z \cdot e, z)$. Da er $[E, 1] = E * 1 = E \times S^2$, mens $[E, z] = E * H$. Strategien for beviset er gradvis å forenkle f, som funksjon av koordinaten $z \in S^1$, fra vilkårlige kontinuerlige funksjoner via Laurent-polynomer og vanlige polynomer til lineære funksjoner. Når f er lineær i z er $[E, f]$ i bildet av produkt-avbildningen $*$.

6. Bott periodisitet

Det er naturlige sum-dekomposisjoner

$$K(X) \otimes K(S^2) \cong (\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(S^2)) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z}$$

og

$$K(X \times S^2) \cong \widetilde{K}(X \wedge S^2) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z}$$

som respekteres av paringene $*$. Det følger at det ureduserte produktet $*\colon K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$ er en isomorfi hvis og bare hvis det reduserte produktet $*\colon \widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(S^2) \to \widetilde{K}(X \wedge S^2)$ er en isomorfi.

Merk at $\mathbb{Z}\{1 - H\} \cong \widetilde{K}(S^2) \subset K(S^2)$, siden både 1 og H restrikterer til den/det trivielle 1-dimensjonale vektorbunten/rommet over basispunktet i S^2.

Teorem. *Den sammensatte homomomorfien*

$$\beta\colon \widetilde{K}(X) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \xrightarrow{*} \widetilde{K}(X \wedge S^2)$$

gitt ved $\beta(x) = (1 - H) * x$ er en isomorfi.

Tilsvarende har vi en isomorfi

$$\widetilde{K}^{-m}(X) = \widetilde{K}(\Sigma^m X) \xrightarrow[\cong]{\beta} \widetilde{K}(\Sigma^{m+2} X) = \widetilde{K}^{-m-2}(X)$$

for alle $m \geq 0$. Vi kan nå redefinere

$$\widetilde{K}^n(X) = \begin{cases} \widetilde{K}(X) & \text{for } n \text{ jevn,} \\ \widetilde{K}(\Sigma X) & \text{for } n \text{ odde.} \end{cases}$$

Dette gjør $\widetilde{K}^*$ til en (fullstendig) redusert kohomologiteori.

Korollar.

$$\widetilde{K}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{for } n \textit{ jevn,} \\ 0 & \textit{for } n \textit{ odde.} \end{cases}$$

Til hver n-dimensjonal kompleks vektorbunt $\pi\colon E \to X$ finnes det en komplementær vektorbunt $E' \to X$ med $E \oplus E' \cong X \times \mathbb{C}^N$. Vi får en inklusjon $E \to X \times \mathbb{C}^N$ som for hvert punkt $x \in X$ plasserer fiberen $\pi^{-1}(x) = E_x$ som et underrom av $\mathbb{C}^N$. La Grassmann-mangfoldigheten

$$Gr_n(\mathbb{C}^N) \cong \frac{U(N)}{U(n) \times U(N-n)}$$

være rommet av n-dimensjonale komplekse underrom $V \subset \mathbb{C}^N$. Det er da en tautologisk $\mathbb{C}^n$-bunt γ^n_N over $Gr_n(\mathbb{C}^N)$ med fiber over $V \in Gr_n(\mathbb{C}^N)$ lik vektorrommet V. Inklusjonen $E \to X \times \mathbb{C}^N$ svarer til en *klassifiserende avbildning* $g\colon X \to Gr_n(\mathbb{C}^N)$ som tar $x \in X$ til fiberen $\pi^{-1}(x)$ oppfattet som underrom av $\mathbb{C}^N$. Da er pullback av den tautologiske bunten γ^n_N langs g isomorf med den gitt bunten $E \to X$.

La så $N \to +\infty$, med $\mathbb{C}^\infty = \cup_N \mathbb{C}^N$, $Gr_n = \cup_N Gr_n(\mathbb{C}^N)$ og en tautologisk bunt γ^n over Gr_n. Det er en homotopi-ekvivalens $Gr_n \simeq BU(n)$, der $BU(n)$ er det klassifiserende rommet for den topologiske gruppen $U(n)$. Siden pullback langs homotope avbildninger gir isomorfe vektorbunter er det en tilordning som tar homotopi-klassen $[g]$ til en avbildning $g\colon X \to Gr_n$ til isomorfiklassen til pullback-bunten $g^*\gamma^n$, og for endelige CW-komplekser X gir dette en bijeksjon

$$[X, Gr_n] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Vect}_n(X)\,.$$

Siden $Gr_n \simeq BU(n)$ har vi mer generelt en bijeksjon

$$[X, \coprod_{n \geq 0} BU(n)] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Vect}(X)\,.$$

Den direkte summen av vektorbunter gir høyre-siden en abelsk monoide-struktur, og en direkte sum av vektorrom $Gr_n \times Gr_m \to Gr_{n+m}$, eller blokk sum av matriser $U(n) \times U(m) \to U(n+m)$, gir en paring

$$\coprod_{n \geq 0} BU(n) \times \coprod_{n \geq 0} BU(n) \to \coprod_{n \geq 0} BU(n)$$

som induserer en abelsk monoide-struktur på venstre-siden. Disse er kompatible under bijeksjonen.
