KJERNEREGELEN I FUNKTORKALKULUS

John R. Klein og John Rognes

Homotopifunktorer

Vil studere homotopifunktorer, dvs. funktorer fra homotopikategorien $h\mathbf{Top}$ av topologiske rom og homotopiklasser av kontinuerlige avbildninger.

Eksempel. Singulær homologi består av funktorer $H_i \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$. Hvis $f \simeq g \colon X \to Y$ er $H_i(f) = H_i(g)$, så H_i faktoriserer over homotopikategorien $h\mathbf{Top}$. Man kan representere singulær homologi ved en funktor til baserte rom $F \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$, slik at $H_i(X) = \pi_i F(X)$. Eksplisitt kan vi la

$$F(X) = \operatorname*{hocolim}_n \Omega^n(K(\mathbb{Z}, n) \wedge X_+),$$

der X_+ er X union et ekstra basispunkt, og $K(\mathbb{Z}, n)$ er Eilenberg–Mac Lane rommet med en eneste ikketriviell homotopigruppe $\pi_n = \mathbb{Z}$. Da tar F en svak ekvivalens til en svak ekvivalens, ved Whitehead-teoremet. (En svak ekvivalens $X \to Y$ er en avbildning som induserer en isomorfi på alle homotopigrupper, for alle valg av basispunkter i X. Homotopiekvivalenser er svake ekvivalenser.)

Singulær homologi oppfyller også Milnors direkte grense aksiom: For hvert endelig CW-kompleks K med en avbildning $K \to X$ finnes en indusert avbildning $H_i(K) \to H_i(X)$, og en indusert avbildning

$$\operatorname*{colim}_{\substack{K \to X \\ K \text{ endelig}}} H_i(K) \to H_i(X).$$

Singulær homologi kommuterer med filtrerte direkte grenser, så dette er en isomorfi. Altså er singulær homologi bestemt av sine verdier på endelige CW-komplekser.

Derfor kan vi fokusere på funktorer $F \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ som (a) bevarer svake ekvivalenser, og (b) induserer en svak ekvivalens

$$\operatorname*{hocolim}_{\substack{K \to X \\ K \text{ endelig}}} F(K) \to F(X)$$

for alle X. Disse kaller vi *homotopifunktorer*, og vi tenker på andre funktorer med verdier i abelske grupper (som er vanlige i algebraisk topologi) ved at de oppstår som homotopigruppene $X \mapsto \pi_i F(X)$ til en slik funktor som tar verdier i baserte rom.

Eksempler. Suspensjon $X \mapsto \Sigma X$, løkkerom $X \mapsto \Omega X$, stabil homotopi $X \mapsto Q(X) = \operatorname{hocolim}_n \Omega^n \Sigma^n X$, funksjonsrom $X \mapsto F(K, X)$ (fra et gitt rom K), algebraisk K-teori $X \mapsto K(\mathbb{Z}[\pi_1 X])$, Waldhausens A-teori $X \mapsto A(X)$, stabil pseudoisotopiteori $X \mapsto \operatorname{hocolim}_n \operatorname{Diff}(X \times I^n \operatorname{rel} X \times I^{n-1})$, topologisk syklisk homologi $X \mapsto TC(X)$, etc.

Lineære funktorer

Singulær homologi oppfyller eksisjon. For $X = X_1 \cup X_2$ med X_1 og X_2 åpne kan vi danne et pushout-kvadrat

$$
\begin{array}{ccc}
X_1 \cap X_2 & \longrightarrow & X_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
X_2 & \longrightarrow & X
\end{array} \tag{$*$}
$$

som beskriver X som sammenlimingen av X_1 og X_2 langs snittet $X_1 \cap X_2$. Et slikt kvadrat kalles *kokartesisk*.

Eksisjon sier at avbildningen $H_i(X_1, X_1 \cap X_2) \to H_i(X, X_2)$ en isomorfi. Vi tenker nå på $H_i(X)$ som $i$te homotopi av en funktor $F(X)$, som tidligere, og anvender F på kvadratet ovenfor:

$$
\begin{array}{ccc}
F(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & F(X_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
F(X_2) & \longrightarrow & F(X)
\end{array} \tag{$**$}
$$

Da sier eksisjon at den relative homotopien $\pi_i(F(X_1), F(X_1 \cap X_2))$ avbilder isomorft til den relative homotopien $\pi_i(F(X), F(X_2))$.

Vi kan omformulere dette ved hjelp av homotopifibre. Hvis $f\colon X \to Y$ er en avbildning er *homotopifiberen* til f i basispunktet $\zeta \in Y$ gitt ved:

$$\mathrm{hofib}(f) = \{(x, \omega) \mid x \in X,\, \omega\colon I \to Y,\, \omega(0) = \zeta,\, \omega(1) = f(x)\}$$

Da er $\mathrm{hofib}(f) \to X \to Y$ en fibersekvens, som induserer en lang eksakt sekvens i homotopi:

$$\pi_i \,\mathrm{hofib}(f) \to \pi_i X \xrightarrow{f_*} \pi_i Y \to \pi_{i-1} \,\mathrm{hofib}(f)$$

Når f er inklusjonen av X som et underrom i Y kan denne lange eksakte sekvensen identifiseres med den lange eksakte sekvensen i homotopi for paret (Y, X):

$$\pi_{i+1}(Y, X) \to \pi_i X \xrightarrow{f_*} \pi_i Y \to \pi_i(Y, X)$$

Spesielt er det naturlige isomofier $\pi_i(Y, X) \cong \pi_{i-1} \,\mathrm{hofib}(f)$ for alle i.

Tilbake til $X = X_1 \cup X_2$. Eksisjon for F sier da at den induserte avbildningen av homotopifibre

$$\mathrm{hofib}(F(X_1 \cap X_2) \to F(X_1)) \to \mathrm{hofib}(F(X_2) \to F(X))$$

induserer en isomorfi på alle homotopigrupper, dvs. at den er en svak ekvivalens. Vi sier da at kvadratet $(**)$ er *homotopi kartesisk*.

Definisjon. La $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ være en homotopifunktor.

F kalles *eksisiv* hvis den avbilder homotopi kokartesiske kvadrater til homotopi kartesiske kvadrater.

F kalles *redusert* hvis den avbilder kontraktible rom til kontraktible rom.

F kalles *lineær* hvis den er redusert og eksisiv.

Funktoren $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ med $\pi_i F(X) = H_i(X)$ er altså eksisiv og redusert, dvs. lineær.

Som en parallell til den ordinære funksjonskalkulus kan vi merke oss at homotopifiberen $\mathrm{hofib}(F(X) \to F(Y))$ svarer til differansen $f(x) - f(y)$, så om $X_1 \cap X_2$, X_1, X_2 og X svarer til x, $x+h$, $x+k$ og $x+h+k$, så sier eksisivitet at

$$f(x+h) - f(x) = f(x+h+k) - f(x+k)$$

for alle x, h og k, dvs. funksjonen f er affin, dvs. på formen $f(x) = ax + b$. At F også er redusert svarer til at $f(0) = 0$, dvs. at $b = 0$ og $f(x) = ax$. Derfor kalles slike funktorer lineære.

Definisjon. En *redusert generalisert homologiteori* er en lineær homotopifunktor $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$.

En vanligere definisjon fokuserer på funktorene $X \mapsto \pi_i F(X)$ med verdier i (graderte) abelske grupper. Dette gir en generalisert redusert homologiteori som oppfyller svak ekvivalens og direkte grense aksiomene.

Eksempel. En lineær funktor F anvendt på diagrammet

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & CX \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

gir et homotopikartesisk diagram

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \longrightarrow & F(CX) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F(CX) & \longrightarrow & F(\Sigma X) \end{array}$$

hvor $F(CX) \simeq *$ er kontraktibel, så avbildningen av (f. eks. horisontale) homotopifibre induserer en svak ekvivalens

$$F(X) \simeq \Omega F(\Sigma X).$$

Altså har teorien $X \mapsto (\pi_i F(X))_i$ en suspensjonsisomorfi, og F tar verdier i uendelige løkkerom, fordi $F(X) \simeq \Omega^n F(\Sigma^n X)$ for alle $n \geq 0$. Vi kan derfor anta at lineære funktorer tar verdier i spektra, eller uendelige løkkerom, fordi hver verdi $F(X)$ kommer utstyrt med $n$te deloopinger $F(\Sigma^n X)$ for alle n.

Funktorderivasjon

I ordinær kalkulus tilnærmer vi deriverbare funksjoner med affine funksjoner, ved $f(x+h) - f(x) \sim f'(x) \cdot h$. Så hvis $y = x + h$ ligger innen h fra x, så ligger $f(y) - f(x)$ innen ca. h^2 fra $f'(x) \cdot h$. I funktorkalkulus tilnærmer vi reduserte funktorer med lineære funktorer. Teorien ble formulert av Tom Goodwillie.

Definisjon. Kategorien $\mathbf{Top}/X$ av rom over X består av rom Y utstyrt med avbildninger $Y \to X$, og morfismene er avbildninger $Y \to Y'$ som kommuterer med avbildningene til X. En funktor $F\colon \mathbf{Top}/X \to \mathbf{Top}_*$ kalles *redusert* hvis $F(X)$ er kontraktibel, der $X \in \mathbf{Top}/X$ er utstyrt med identitetsavbildningen. Vi kan også snakke om at F er *eksisiv* eller *lineær*. I det siste tilfellet tar F verdier i uendelige løkkerom (eller spektra). For $X = *$ faller kategoriene $\mathbf{Top}/X$ og $\mathbf{Top}$ sammen.

Gitt en homotopifunktor F og et rom X kan vi tilordne en redusert funktor $\tilde{F}_X\colon \mathbf{Top}/X \to \mathbf{Top}_*$ ved $\tilde{F}_X(Y) = \mathrm{hofib}(F(Y) \to F(X))$. Da er $\tilde{F}_X(X)$ kontraktibel, og det er en naturlig transformasjon $\tilde{F}_X(Y) \to F(Y)$ med konstant fiber opp til homotopi.

Definisjon. En homotopifunktor $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ er *deriverbar* i et rom X hvis det finnes en lineær funktor $D_X F\colon \mathbf{Top}/X \to \mathbf{Top}_*$ fra rom $Y \to X$ over X til baserte rom, utstyrt med en naturlig transformasjon

$$\tilde{F}_X(Y) = \mathrm{hofib}(F(Y) \to F(X)) \to D_X F(Y)$$

som er $(2k - c)$-sammenhengende når $Y \to X$ er k-sammenhengende, for en konstant c. Differensialet $D_X F$ er da den "beste" lineære approksimasjonen til F for rom over X, og to eksisive funktorer som oppfyller dette kravet er svakt ekvivalente.

Den reduserte funktoren $\tilde{F}_X(Y)$ spiller rollen som den vertikalt forskjøvede funksjonen $\tilde{f}_x(y) = f(y) - f(x)$. Differensialet $D_X F$ spiller rollen til den lineære funksjonen $y = x + h \mapsto f'(x) \cdot h$ som best tilnærmer $\tilde{f}_x(y) = f(y) - f(x)$.

Eksempel. En redusert homotopifunktor $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ er deriverbar i $X = *$ hvis det finnes en lineær homotopifunktor $D_* F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ slik at $F(Y) \to D_* F(Y)$ er $(2k - c)$-sammenhengende når Y er k-sammenhengende, for en konstant c. Da er differensialet $D_* F$ en redusert generalisert homologiteori, nemlig den som best approksimerer F for høyt sammenhengende rom Y. I så fall er differensialet $D_* F$ eksplisitt gitt ved konstruksjonen

$$D_* F(Y) = \underset{n}{\mathrm{hocolim}}\, \Omega^n F(\Sigma^n Y).$$

Definisjon. En homotopifunktor $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ er *stabilt* 0*-eksisiv* hvis den tar k-sammenhengende avbildninger $f\colon X \to Y$ til $(k - c)$-sammenhengende avbildninger $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$, for en konstant c.

En homotopifunktor $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ er *stabilt* 1*-eksisiv* hvis den tar (homotopi) kokartesiske kvadrater

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_2} \\ X_2 & \xrightarrow{g_1} & X_{12} \end{array}$$

(dvs. $X_1 \cup_{X_0} X_2 \simeq X_{12}$) med f_1 k_1-sammenhengende og f_2 k_2-sammenhengende, til et kvadrat

$$\begin{array}{ccc} F(X_0) & \xrightarrow{F(f_1)} & F(X_1) \\ {\scriptstyle F(f_2)}\downarrow & & {\scriptstyle F(g_2)}\downarrow \\ F(X_2) & \xrightarrow{F(g_1)} & F(X_{12}) \end{array}$$

som er $(k_1 + k_2 - c)$-homotopi kartesisk, for en konstant c (dvs. avbildningen av homotopifibre er minst $(k_1 + k_2 - c)$-sammenhengende).

En funktor som er både stabilt 0-eksisiv og stabilt 1-eksisiv kaller vi *stabilt eksisiv*.

Proposisjon (Goodwillie). *En stabilt* 1*-eksisiv funktor er deriverbar i alle rom* X.

Eksempel. Identitetsfunktoren id: $X \mapsto X$ er stabilt eksisiv, ved Blakers–Massey teoremet. Differensialet i $*$ til identiteten er stabil homotopi, dvs. $D_* \operatorname{id}(Y) = \operatorname{hocolim}_n \Omega^n \Sigma^n Y = Q(Y)$.

Waldhausens A-teori, $A\colon X \mapsto A(X)$ og topologisk syklisk homologi $TC\colon X \mapsto TC(X)$ er også stabilt eksisive.

Definisjon. La X være et rom, med basispunkt $\xi \in X$. Hvis F er deriverbar i et rom X, så er den *deriverte* til F i (X, ξ) spekteret $\partial_\xi F(X)$, med $n$te rom $D_X F(X \vee_\xi S^n)$. Her oppfattes $X \vee_\xi S^n$ som et rom over X ved å sende hele S^n til ξ. Det underliggende uendelige løkkerommet til dette spekteret er $\Omega^\infty \partial_\xi F(X) = D_X F(X \vee_\xi S^0)$.

Differensialet $D_X F$ bestemmer den deriverte $\partial_\xi F(X)$, og omvendt. For $X = *$ er f. eks. $D_* F(Y) \simeq \Omega^\infty(\partial_\xi F(X) \wedge Y)$, der $\wedge$ er smash produkt med et spektrum, og Ω^∞ det underliggende (uendelige løkke-)rommet.

Eksempler. Den deriverte av identiteten i (X, ξ), når bildet $\operatorname{id}(X) = X$ er basert i et punkt ζ, er $\partial_\xi \operatorname{id}(X) = \Sigma^\infty_+(\Omega_{\xi,\zeta} X)$, der $\Sigma^\infty_+(Z)$ er det ureduserte suspensjonsspekteret med $n$te rom $Q(\Sigma^n(Z_+))$, og $\Omega_{\xi,\zeta} X$ er rommet av veier i X fra ξ til ζ.

Den deriverte av Waldhausens A-teori i (X, ξ) (her har bildet $A(X)$ et naturlig basispunkt $*$) er $\partial_\xi A(X) = \Sigma^\infty_+(\Omega_\xi X)$. Det samme gjelder for topologisk syklisk homologi TC.

Det er en stabilt eksisiv funktor gitt ved uredusert stabil homotopi av fri løkkerom $F\colon X \mapsto Q_+(\Lambda X)$. Her er $\Lambda X = F(S^1, X)$ (ubaserte avbildninger), og $Q_+(Z) = Q(Z_+)$. Den deriverte i (X, ξ) er funksjonsspekteret $\partial_\xi F(X) \simeq F(S^1, \Sigma^\infty_+ \Omega_\xi X)$, med underliggende rom $\Omega^\infty \partial_\xi F(X) \simeq \Lambda Q_+(\Omega_\xi X)$.

Funktorkalkulus

Det finnes resultater hvor funktorderivasjon brukes parallelt med derivasjon i vanlig kalkulus.

Teorem. *La* $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *være kontinuerlige funksjoner som er deriverbare overalt i det indre av intervallet. Hvis* $f'(x) = g'(x)$ *for alle* $x \in (a, b)$*, så finnes* *det en konstant C slik at $f(x) = g(x) + C$ for alle $x \in [a, b]$. Hvis $f(c) = g(c)$ i et punkt c, er $C = 0$ og $f(x) = g(x)$ for alle x.*

Beviset ser på differansen $h(x) = f(x) - g(x)$ og bruker middelverdisetningen, som igjen bruker Rolles teorem.

Teorem. *La $F, G\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ være stabilt eksisive funktorer, og la $\phi\colon F \to G$ være en naturlig transformasjon som induserer svake ekvivalenser*

$$\partial_\xi \phi(X)\colon \partial_\xi F(X) \to \partial_\xi G(X)$$

for alle baserte rom (X, ξ). Da finnes det et rom C og en naturlig svak fibersekvens

$$C \to F(X) \xrightarrow{\phi_X} G(X)$$

for alle rom X. Hvis $\phi_Z\colon F(Z) \to G(Z)$ også er en svak ekvivalens for et rom Z, så er ϕ en naturlig svak ekvivalens.

Teoremet kan anvendes på syklotomsporet $\mathrm{trc}_X\colon A(X) \to TC(X)$, for å vise at $\mathrm{hofib}(\mathrm{trc}_X)$ er (lokalt) konstant. Så

$$\begin{array}{ccc} A(Y) & \xrightarrow{\mathrm{trc}} & TC(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(X) & \xrightarrow{\mathrm{trc}} & TC(X) \end{array}$$

er homotopi kartesisk for alle avbildninger $Y \to X$ mellom enkeltsammenhengende rom X og Y, og syklotomsporet induserer en relativ svak ekvivalens:

$$\begin{aligned} \mathrm{trc}\colon A(Y \to X) &= \mathrm{hofib}(A(Y) \to A(X)) \\ \xrightarrow{\simeq} TC(Y \to X) &= \mathrm{hofib}(TC(Y) \to TC(X)) \end{aligned}$$

Dette er et teorem av Bökstedt, Carlsson, Cohen, Goodwillie, Hsiang og Madsen.

Det finnes også en teori for høyere deriverte av funktorer, med paralleller til Taylor-polynomer og Taylor-rekker. Analytiske funktorer kan tilnærmes av sine Taylor-rekker, og det finnes teoremer som sier at to analytiske funktorer som har ekvivalente følger av høyere deriverte i et gitt rom (X, ξ), også stemmer overens på rom $Y \to X$ over X i et konvergensområde omkring X.

Vi formulerer ikke dette resultatet, men bemerker at det altså finnes en kalkulus for slike homotopifunktorer.

Kjerneregelen

La $F, G\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ være homotopifunktorer. Vi stiller følgende spørsmål:

Hvis F er deriverbar i X, og G er deriverbar i $F(X)$, er da $G \circ F = GF$ deriverbar i X ? Kan vi uttrykke den deriverte til GF i X ved hjelp av den deriverte av F i X og av G i $F(X)$?

Definisjon. En funktor $F\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ er *kontinuerlig* hvis funksjonen

$$\mathbf{Top}_*(X,Y) \to \mathbf{Top}_*(F(X),F(Y))$$

som tar $f\colon X \to Y$ til $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ er kontinuerlig for alle X og Y. Her gir vi morfismemengdene $\mathbf{Top}_*(X,Y)$ og $\mathbf{Top}_*(F(X),F(Y))$ den kompakt-åpne topologien, dvs. $\mathbf{Top}_*$ er topologisk *beriket*.

Teorem (Kjerneregelen). *La $F, G\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ være stabilt eksisive, kontinuerlige homotopifunktorer. La X være basert i ξ, og anta at $F(X)$ er veisammenhengende og basert i ζ. La $\Omega_\zeta F(X)$ være Kan løkkegruppen til $F(X)$ i ζ.*

Da er $GF\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ en stabilt eksisiv og kontinuerlig homotopifunktor.

Det er en venstre gruppevirkning av $\Omega_\zeta F(X)$ på den deriverte $\partial_\xi F(X)$, og en høyre gruppevirkning av $\Omega_\zeta F(X)$ på den deriverte $\partial_\zeta G(F(X))$.

Den deriverte av GF i (X,ξ) er svakt ekvivalent med spekteret

$$\partial_\xi(GF)(X) \simeq \partial_\zeta G(F(X)) \wedge_{h\Omega_\zeta F(X)} \partial_\xi F(X).$$

Her betegner $\wedge_{h\Omega_\zeta F(X)}$ homotopi orbit spekteret med hensyn på den diagonale virkningen av $\Omega_\zeta F(X)$.

Antagelsen om at $F(X)$ er veisammenhengende kan utelates, men da blir den deriverte $\partial_\xi(GF)(X)$ en "wedge sum" av homotopi orbit spektra som ovenfor, med en summand for hver veisammenhengskomponent i $F(X)$.

Kan løkkegruppen til et basert rom (X,ξ) er en topologisk gruppe som er svakt ekvivalent med løkkerommet $\Omega_\xi X$ til X basert i ξ, som rom, som H-gruppe, eller som gruppe-aktig A_∞-rom. Det er en naturlig svak ekvivalens $B\Omega_\xi X \simeq X$. Kan løkkegruppen lar oss altså skrive et vilkårlig veisammenhengende basert rom (X,ξ) på formen BG, der G er en topologisk gruppe, og B er bar-konstruksjonen:

$$BG = \coprod_{q\geq 0} G^q \times \Delta^q/\sim$$

Eksempel. Hvis $X = *$ og $F(X) = *$, så er $D_*F(Y) = \Omega^\infty(\partial_* F(*) \wedge Y)$ og $D_*G(Z) = \Omega^\infty(\partial_* G(*) \wedge Z)$. Det er da relativt lett å vise at

$$D_*(GF)(Y) = \Omega^\infty(\partial_* G(*) \wedge \partial_* F(*) \wedge Y),$$

så $\partial_*(GF)(*) \simeq \partial_* G(*) \wedge \partial_* F(*)$. Problemet ligger i å generalisere dette til tilfellet $F(X) \not\simeq *$.

Retraktive rom

Vi vil bevise kjerneregelen i et litt mer generelt oppsett for funktorkalkulus enn det vi har sett på til nå.

Definisjon. La X være et topologisk rom. Et *retraktivt* rom over X er et rom Y utstyrt med strukturavbildninger $i\colon X \to Y$ og $r\colon Y \to X$ slik at $r \circ i = \mathrm{id}_X$. Da er r en retraksjon, og i en imbedding.

En avbildning av retraktive rom $(Y, i, r) \to (Y', i', r')$ er en avbildning $Y \to Y'$ som kommuterer med strukturavbildningene.

Kategorien av retraktive rom over X kalles $R(X)$.

For eksempel er $R(*)$ lik kategorien av baserte topologiske rom $\mathbf{Top}_*$.

En funktor $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ gir opphav til en funktor $R(X) \to R(F(X))$, som tar et retraktivt rom (Y, i, r) over X til det retraktive rommet $(F(Y), F(i), F(r))$ over $F(X)$. Vi betegner også denne funktoren med F. Den er alltid *redusert*, i betydningen at $X \in R(X)$ går til $F(X) \in R(F(X))$.

Man kan så definere differensialer og deriverte til deriverbare funktorer

$$F\colon R(X) \to R(Y)$$

hvor $Y = F(X)$, og søke å vise en kjerneregel for sammensatte funktorer

$$R(X) \xrightarrow{F} R(Y) \xrightarrow{G} R(Z)$$

der $Y = F(X)$ og $Z = G(Y)$.

Dette leder en til å studere *spektra over* Y, som er et teknisk noe komplisert begrep. I stedet viser det seg, når rommene som er involvert er veisammenhengende, at spørsmålene om derivasjon av funktorer mellom kategorier av retraktive rom med fordel kan oversettes til spørsmål om derivasjon av funktorer mellom kategorier av rom med gruppe-virkninger.

Rom med gruppevirkning

Definisjon. La G være en topologisk gruppe. Et *basert G-rom* er et basert rom (Z, ξ) med en (venstre) virkning $G \times Z \to Z$ som tar (g, z) til $g \cdot z \in Z$, og som holder basispunktet ξ i ro, dvs. $g \cdot \xi = \xi$ for alle $g \in G$.

En G-avbildning $f\colon Z \to W$ av baserte G-rom er en basert avbildning som er G-ekvivariant, dvs. $g \cdot f(z) = f(g \cdot z)$ for alle $g \in G$, $z \in Z$.

Kategorien av baserte G-rom kalles R^G.

Proposition. *La $X = BG$ for en topologisk gruppe G. Det finnes funktorer*

$$\Phi\colon R^G \to R(X) \qquad \text{og} \qquad \Psi\colon R(X) \to R^G$$

slik at:

(1) *Det finnes naturlige svake ekvivalenser $\Psi \circ \Phi \simeq \mathrm{id}_{R^G}$ og $\Phi \circ \Psi \simeq \mathrm{id}_{R(X)}$,*
(2) *Φ og Ψ bevarer k-sammenhengende avbildninger og svake ekvivalenser,*
(3) *Φ bevarer k-kokartesiske og homotopi kokartesiske kvadrater, og*
(4) *Ψ bevarer k-kartesiske og homotopi kartesiske kvadrater.*

Ved å bruke Φ og Ψ kan vi oversette spørsmål om retraktive rom over X frem eller tilbake som spørsmål om baserte G-rom.

Konstruksjon. Modulo tekniske spørsmål om kofibrans, kan Φ og Ψ konstrueres som følger. La EG være et kontraktibelt rom med fri G-virkning. EG kan konstrueres slik at orbitrommet $EG/G = BG$ er det klassifiserende rommet til G.

For $Z \in R^G$ et basert G-rom er

$$\Phi(Z) = EG \times_G Z$$

lik *Borel-konstruksjonen* på Z. Her betegner $\times_G$ orbitrommet av $EG \times Z$ med hensyn på den diagonale gruppevirkningen $g \cdot (e, z) = (g \cdot e, g \cdot z)$. De baserte G-avbildningene $* \to Z \to *$ induserer strukturavbildningene

$$BG = EG \times_G * \to EG \times_G Z \to EG \times_G * = BG$$

som uttrykker $\Phi(Z)$ som et objekt i $R(BG)$.

For $Y \to X = BG$ et retraktivt rom over X, la P_Y være pullback (lik fiberproduktet) av avbildningene

$$Y \xrightarrow{r} X = BG \xleftarrow{\pi} EG$$

der $\pi\colon EG \to BG$ er orbitprojeksjonen for G-virkningen på EG. Så $P_Y = \{(y, e) \in Y \times EG \mid r(y) = \pi(e)\}$. Da arver P_Y en G-virkning fra EG ved $g \cdot (y, e) = (y, g \cdot e)$.

Videre induserer imbeddingen $i\colon X = BG \to Y$ en G-ekvivariant imbedding $\iota\colon EG \to P_Y$, ved $\iota(e) = (i\pi(e), e)$. Da er

$$\Psi(Y) = P_Y/EG$$

kvotientrommet, hvor det kontraktible underrommet $\iota(EG)$ kollapses til et punkt. $\Psi(Y)$ er da et G-rom basert i dette punktet, dvs. et objekt i R^G.

Eksempel. La $X = BG$ og la $\Sigma^n(G_+) = G_+ \wedge S^n$ ha G-virkningen gitt ved multiplikasjon på G_+. Da er $\Phi(\Sigma^n(G_+)) \simeq X \vee_\xi S^n$.

La $Y \in R(X)$ og se på $F(Y) \in R(F(X))$. La $F(X) = BH$. For gruppen H er da $\Psi(F(Y)) \simeq \tilde{F}_X(Y)$.

Ekvivariant derivasjon

La G og H være topologiske grupper. Vi vil nå studere derivasjon av funktorer $f\colon R^G \to R^H$.

Definisjon. En G-avbildning $Z \to W$ av baserte G-rom kalles en *svak ekvivalens* hvis den underliggende avbildningen av baserte rom er en svak ekvivalens.

Et endelig basert G-CW-kompleks med fri G-virkning vekk fra basispunktet kalles et *endelig objekt* i kategorien R^G. (Dette er et rom K som kan bygges fra et punkt $*$ ved induktivt å adjungere endelig mange fri G-celler $G \times D^n$ til cellene av dimensjon $< n$, langs G-avbildninger fra randen $G \times S^{n-1}$.)

En funktor $f\colon R^G \to \mathbf{Top}_*$ kalles en *homotopifunktor* hvis den (a) bevarer svake ekvivalenser, og (b) induserer en svak ekvivalens

$$\operatorname*{hocolim}_{\substack{K \to Z \\ K \text{ endelig}}} f(K) \to f(Z)$$

for alle Z. f er altså bestemt av verdiene på endelige baserte fri G-CW-komplekser.

Siden vi har et relativt svakt ekvivalensbegrep (en svak ekvivalens $Z \to W$ i R^G behøver f. eks. ikke indusere svake ekvivalenser på fikspunktrommene $Z^G \to W^G$), så er det et relativt sterkt krav på funktoren f at den skal bevare svake ekvivalenser.

Betingelsen at K skal ha fri basert G-virkning er av mindre betydning, siden ethvert basert G-rom Z er svakt ekvivalent med det *frie* baserte G-rommet $Z \wedge EG_+$, som kan approksimeres av endelige frie baserte G-CW-komplekser.

En homotopifunktor $f\colon R^G \to R^H$ sies å være redusert, eksisiv, lineær, stabilt 0-eksisiv, stabilt 1-eksisiv eller stabilt eksisiv hvis de tilsvarende kravene gjelder for den underliggende funktoren $R^G \to R^H \to \mathbf{Top}_*$ oppfattet som restriksjonen av en funktor $\mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ over den glemsomme funktoren $R^G \to \mathbf{Top}$.

Definisjon. La $f\colon R^G \to R^H$ være en stabilt 1-eksisiv homotopifunktor. Den tilhørende *reduserte* funktoren er $\tilde{f}(Z) = \mathrm{hofib}(f(Z) \to f(*))$. *Differensialet* $Df\colon R^G \to R^H$ er funktoren

$$Df(Z) = \operatorname*{hocolim}_n \Omega^n \tilde{f}(\Sigma^n Z).$$

Den *deriverte* av f er spekteret ∂f med $n$te rom $Df(\Sigma^n(G_+))$, og underliggende rom $Df(G_+)$. Spekteret ∂f har en venstre gruppevirkning av H fra virkningen i R^H på rommene $f(\Sigma^n Z)$.

Hvis f også er kontinuerlig, så har ∂f en høyre gruppevirkning av G, hvor $g \in G$ virker ved avbildningen indusert av f på G-avbildningene $\times g\colon \Sigma^n(G_+) \to \Sigma^n(G_+)$ i R^G.

Våre spektra med gruppevirkninger av G er *naive* G-ekvivariante spektra, i den forstand at de ikke forutsettes å tillate deloopinger med hensyn på noen ikketrivielle representasjoner av gruppen G.

Disse definisjonene er kompatible med Goodwillies definisjoner:

Proposisjon. *La $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ være en homotopifunktor, som induserer en funktor $F\colon R(X) \to R(Y)$, der $Y = F(X)$. Anta $X = BG$ og $Y = BH$ er veisammenhengende. La $f = \Psi \circ F \circ \Phi\colon R^G \to R^H$ være den sammensatte funktoren.*

Hvis $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}_*$ er stabilt eksisiv, så er $f\colon R^G \to R^H$ redusert og stabilt eksisiv. Differensialene $D_X F$ og Df stemmer overens, i den forstand at sammensetningene

$$R^G \xrightarrow{\Phi} R(X) \xrightarrow{\text{glemsom}} \mathbf{Top}/X \xrightarrow{D_X F} \mathbf{Top}_*$$

og

$$R^G \xrightarrow{Df} R^H \xrightarrow{\text{glemsom}} \mathbf{Top}_*$$

er naturlig svakt ekvivalente. De deriverte stemmer også overens, i den forstand at det finnes svake ekvivalenser av spektra $\partial_\xi F(X) \simeq \partial f$, der $X = BG$ er basert i ξ.

For å vise kjerneregelen (når X, $Y = F(X)$ og $Z = G(Y)$ er veisammenhengende) er det altså nok å vise at for topologiske grupper G, H og K, og reduserte, kontinuerlige, stabilt eksisive funktorer

$$R^G \xrightarrow{f} R^H \xrightarrow{g} R^K$$

er sammensetningen $gf\colon R^G \to R^K$ stabilt eksisiv, og

$$\partial(gf) \simeq \partial g \wedge_{hH} \partial f.$$

Tilfellene hvor X er Z har flere veisammenhengskomponenter kan lett reduseres til de veisammenhengende tilfellene. At sammensetningen gf er stabilt eksisiv er en direkte anvendelse av det duale Blakers–Massey teoremet. Det gjenstår å vise formelen for $\partial(gf)$.

Et representasjonsteorem

Teorem (Brown representabilitet). *La $f\colon R^G \to R^H$ være en kontinuerlig lineær homotopifunktor. Da finnes et spektrum $\mathbf{E}$ med venstre H-virkning og høyre G-virkning slik at f er gitt ved*

$$f(Z) \simeq \Omega^\infty(\mathbf{E} \wedge_{hG} Z)$$

opp til naturlig svak ekvivalens.

Korollar. *La $f\colon R^G \to R^H$ være en kontinuerlig, redusert, stabilt 1-eksisiv funktor. Da er differensialet Df gitt ved*

$$Df(Z) \simeq \Omega^\infty(\partial f \wedge_{hG} Z)$$

opp til naturlig svak ekvivalens.

Fra representasjonsteoremet og stabil 0-eksisivitet for f og g følger det så relativt direkte at

$$D(gf)(Z) \simeq \Omega^\infty(\partial g \wedge_{hH} \partial f \wedge_{hG} Z),$$

og dermed at $\partial(gf) \simeq \partial g \wedge_{hH} \partial f$. Dette beviser kjerneregelen for funktorer $R^G \to R^H \to R^K$, og ekvivalensene Φ og Ψ gir kjerneregelen for funktorer $R(X) \to R(Y) \to R(Z)$. Det opprinnelige tilfellet med funktorer $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ følger fra kompatibilitetsresultatet.

Bevis av representasjonsteoremet

La $\mathbf{Sp}$ være kategorien av spektra, og la $\mathbf{Sp}^H$ være kategorien av spektra med H-virkning. Gitt en kontinuerlig lineær funktor $f\colon R^G \to R^H$, kan vi løfte den til en kontinuerlig lineær funktor $F\colon R^G \to \mathbf{Sp}^H$, slik at det er naturlige svake ekvivalenser $\Omega^\infty F(Z) \simeq f(Z)$ for alle Z. Her har $F(Z)$ $n$te rom $f(\Sigma^n Z)$.

Vi konstruerer så en naturlig transformasjon

$$\eta_Z\colon F(G_+) \wedge_{hG} Z \to F(Z)$$

av kontinuerlige lineære homotopifunktorer $R^G \to \mathbf{Sp}^H$.

Det er en homeomorfi

$$\phi\colon Z \to R^G(G_+, Z)$$

som tar $z \in Z$ til $\phi_z\colon G_+ \to Z$ med $\phi_z(g) = gz$. ϕ er G-ekvivariant når Z gis den vanlige G-virkningen og $g \in G$ virker på avbildningsrommet gjennom høyre multiplikasjon på kilden, G_+.

Den kontinuerlige funktoren F gir en avbildning

$$R^G(G_+, Z) \xrightarrow{F} \mathbf{Sp}^H(F(G_+), F(Z)).$$

Sammensetningen $F \circ \phi$ er adjungert til en avbildning i $\mathbf{Sp}^H$:

$$F(G_+) \wedge Z \to F(Z)$$

G virker diagonalt på venstre side, gjennom høyre multiplikasjon på G_+ og den vanlige virkningen på Z. Avbildningen er G-ekvivariant på prespektrums-nivået når $F(Z)$ gis den trivielle virkningen. Altså faktoriserer den over homotopi orbit spekteret, og definerer en naturlig transformasjon av kontinuerlige, lineære homotopifunktorer:

$$\eta_Z \colon F(G_+) \wedge_{hG} Z \to F(Z)$$

Så sjekker man ved å lese definisjonene at η_Z er en svak ekvivalens for $Z = G_+$. Det følger ved linearitet og induksjon at η_Z er en svak ekvivalens også for $Z = \Sigma^n(G_+)$ for alle n, og dermed for Z et vilkårlig endelig fritt basert G-CW-kompleks. Ved direkte grenseaksiomet pålagt F er η en svak ekvivalens for alle $Z \in R^G$.

Vi lar så $\mathbf{E} = F(G_+) \in \mathbf{Sp}^H$, der $\mathbf{E}$ har den høyre G-virkningen der $g \in G$ virker ved avbildningen indusert av F på høyremultiplikasjonen $\times g \colon G_+ \to G_+$. Dette beviser representasjonsteoremet.