Presentasjon. Jeg heter John Rognes, og er førsteamanuensis ved Matematisk institutt her i Oslo. Også tidligere deltaker i Abel-konkurransen fra 1981 til 1984.

Tittel. Jeg skal holde et foredrag om 'knuteteori', dvs. den matematiske teorien om tråder med knute på. Dette er en del av feltet topologi, som sammen med geometri er den delen av matematikken som studerer geometriske former, romlige størrelser og deres egenskaper.

Hva er en knute ?. (Ta frem et belte, legg armene i kors, sleng beltet opp og grip det med begge hender.) Kan ha et belte uten knute på, og holde det med armene knyttet. (Trekk armene fra hverandre.) Eller et belte med knute, og armene rette. (Tre armene i kors igjen.) Eller et belte uten knute. (Trekk armene fra hverandre, og spenn igjen beltet, med en trekløver knute på. Dette kalles en 'trekløverknute'.

Så en knute er en enkel kurve i rommet (uten selvskjæringer), men endene kan ikke være helt frie. Ordner dette ved å føre endene sammen, dvs. ikke ha noen ender. Så en knute er en enkel lukket kurve i rommet.

Eksempler. En sirkel, en komplisert plan knute, trekløverknuten, åttetallsknuten.

Definisjon. En parametrisert *knute* k er en kontinuerlig, en-entydig avbildning $k\colon S^1 \to R^3$, der S^1 er enhetssirkelen i planet og R^3 er det tre-dimensjonale rommet.

Knutetyper. Vi vil si at to knuter er av samme 'type' hvis den ene kan omformes til den andre gjennom kontinuerlige deformasjoner. Uten at vi bryter tråden knuten er tenkt laget av, eller at tråden får skjære gjennom seg selv.

Definisjon. To knuter k_0 og k_1 har samme *knutetype* dersom det finnes en kontinuerlig parametrisert familie av knuter $t \mapsto k_t$ for $0 \le t \le 1$ som begynner med k_0 og slutter med k_1. Vi skriver $k_0 \sim k_1$.

Dette er en ekvivalensrelasjon, så samlingen av alle knuter deles i ekvivalensklasser, én for hver knutetype, som består av alle knutene av den gitte typen.

Eksempel. En knute som er av samme type som sirkelen S^1 i planet $R^2 \subset R^3$ kalles en *triviell knute*, eller en *uknute*.

Vi kan vise at to knuter har samme type ved å finne en deformasjon fra den ene til den andre. Det er ikke alltid så lett å vise at to knuter ikke har samme type. F.eks. har vi ikke til nå forklart hvorfor trekløverknuten og åttetallsknuten ikke er trivielle knuter.

Spørsmål. Hvilke knutetyper finnes det ?

Flere eksempler. (Vis en foil med knutene 3_1, 4_1, 5_1, 5_2, 6_1, 6_2, 6_3, 7_1.)

Biokjemisk eksempel. Arvestoffet DNA (deoxyribonukleinsyre) består av lange kveiler av doble spiraler, og finnes f.eks. i cellekjernene. Det er mye DNA i en celle. Hvis en cellekjerne var så stor som en fotball ville DNA-kjedene i den være til sammen 20 mil (200 km) lange. Det blir som 20 mil tynt fiskesnøre sammenkveilet i en kurv, på størrelse med den nevnte fotballen.

Det er klart at dette DNA'et lett kan være knyttet og sammenfiltret i denne vasen. Men for at arvestoffet skal kunne avleses (slik at genene kan uttrykkes gjennom at de riktige proteinsekvensene bygges opp), må alle delene av DNA-tråden være tilgjengelige. Da må deler av DNA'et kunne trekkes frem, ut av den sammenfiltrede vasen. De enzymene som gjør dette kalles 'topoisomeraser', og kan vri og dreie på DNA-kjeden, eller klippe den opp og føye den sammen igjen.

Knuteteori har blitt anvendt til å studere topoisomerasenes virkning på arvestoffet. I elektronmikroskop kan man se hvordan ringformede kjeder av DNA (som finnes i mitokondriene i cellene) kan være knyttet som en knute. Så kan man tilføre et slikt enzym. Hvis DNA-kjeden deretter er knyttet på en annen måte, dvs. har en annen knutetype, så vet man at enzymet har brutt DNA-kjeden underveis, og satt den sammen igjen.

Bilder av knuter. Gitt en knute k i rommet kan vi projisere k ned på et plan. Dette gir en kurve i planet, muligens med selvskjæringer. Man kan velge planet slik at det høyst dreier seg om dobbeltpunkter, hvor en del av kurven krysser en annen del på tvers. Vi kan altså unngå trippel-krysninger, eller at to deler av kurven tangerer hverandre. Et slikt bilde av en knute kalles en *knuteprojeksjon.* (Se foilen.)

Men det finnes selvsagt mange forskjellige slike bilder av samme knute, eller av knuter av samme knutetype. Hvordan kan man avgjøre om to forskjellige knuteprojeksjoner representerer samme knutetype eller ikke ?

Krysningstall. Gitt en knuteprojeksjon for en knute k kan vi telle antall krysninger som forekommer i det bildet. Blant alle knuteprojeksjoner som finnes for knuter av samme type som k, er det én (eller noen) som har det minimale antall krysninger som forekommer for disse bildene. Dette kaller vi krysningstallet til k.

Definisjon. *Krysningstallet* til en knute k er det minste antall krysninger som forekommer i noen knuteprojeksjon for en knute av samme type som k. Det betegnes $c(k)$, og to knuter av samme type har samme krysningstall. Omvendt er to knuter med forskjellige krysningstall nødvendigvis av forskjellig knutetype.

Få krysninger. Den trivielle knuten har sirkelen med 0 krysninger som et bilde, så $c(\text{uknute}) = 0$.

Gitt en knute med bare 1 krysning kan en del av knuten dreies en halv omdreining, og krysningen kan fjernes. Derfor er den ingen knuter med krysningstall lik 1.

Oppgave. Vis at en knuteprojeksjon med 2 krysninger er et bilde av en triviell knute.

Derimot er $c(\text{trekløver}) = 3$ og $c(\text{åttetall}) = 4$. Det vil si, at bildene vi har sett på har det minste mulige antall krysninger for disse knutetypene. Men hvordan viser man dette ? Hvis vi kunne vise at trekløveren ikke er triviell, vil det følge at den ikke har noen projeksjon med 0, 1 eller 2 krysninger, og derfor er 3 det minste antallet krysninger for denne knuten.

Lenker. For å studere knuter kan det være nyttig å inkludere en generalisering, nemlig en *lenke* av flere knuter i rommet som ikke skjærer hverandre. Vi kan skrive den som en disjunkt union

$$k_1 \cup \cdots \cup k_n$$

av knuter, der n er antallet komponenter.

Eksempler. Hopf lenken, Whitehead lenken, de Borromeiske ringer.

Knuteinvarianter. En metode for å klassifisere knutetyper er å lage seg *knuteinvarianter.* Dette er funksjoner som til en knute tilordner et tall, eller et polynom, eller et annet matematisk objekt, og som er slik at to knuter av samme type tilordnes samme tall, polynom eller matematisk objekt. En funksjon

$$f\colon \{\text{knuter}\} \to \{\text{tall, polynomer, e.l.}\}$$

kalles altså en knuteinvariant dersom det er slik at $f(k_0) = f(k_1)$ hver gang k_0 og k_1 har samme knutetype.

En slik knuteinvariant er krysningstallet $k \mapsto c(k)$. Det kan være vanskelig å beregne. Nå skal vi se på en annen knuteinvariant, som alltid lar seg beregne, med litt strev.

Alexander–Conway polynomet. Den amerikanske matematikeren J. Alexander definerte, omkring 1928, en knuteinvariant som til hver knute(-type) tilordner et polynom, som siden kalles *Alexander-polynomet* til knuten. To knuter av samme type har samme Alexander-polynom, så dette er en knuteinvariant, som kan brukes til å bevise at to knuter er av forskjellige typer.

Den engelske matematikeren J.H. Conway fant i 1969 en enkel beskrivelse av hvordan man kan beregne dette Alexander-polynomet, som vi skriver $\Delta(k)$, og som vi kan tenke på som et polynom i en variabel x. Da er $\Delta(k)$ også definert for lenker, som godt kan dukke opp underveis i beregningen.

Alexander–Conway polynomet Δ er bestemt av to regler:

Regel 1.

$$\Delta(\text{uknute}) = 1\,.$$

Regel 2.

$$\Delta(k_+) - \Delta(k_-) = x \cdot \Delta(k_0)\,.$$

Den første regelen sier at enhver triviell knute har polynom 1, dvs. det konstante polynomet med verdi 1.

Den andre regelen knytter sammen verdien til tre knuter eller lenker, som bare er forskjellige nær ett punkt. Husk at knutene er parametrisert, så vi har valgt en omløpsretning langs knuten.

Da skal k_+ ha en høyrekrysning ved punktet, dvs. sett i retning av overkrysningen kommer underkrysningen fra høyre. Videre skal k_- ha en venstrekrysning, dvs. sett i retning av overkrysningen kommer underkrysningen fra venstre. Til slutt skal k_0 ikke ha noen krysning i det hele tatt ved punktet, så kurvene bøyer fra hverandre, slik de må i.h.t. omløpsretningen.

Vi har ikke vist at et slikt polynom eksisterer, men det gjør det altså ved Alexanders konstruksjon, og vi kan regne det ut ved Conways to regler.

Lemma. Hvis $k_1 \cup k_2$ er en lenke av to knuter som kan skilles helt fra hverandre, så er

$$\Delta(k_1 \cup k_2) = 0\,.$$

Bevis. Vi kan finne $k_0 = k_1 \cup k_2$ slik at k_+ og k_- skiller seg ved at den ene delen av knuten gis en hel omdreining mens den andre er i ro. Da har disse samme knutetype, så

$$0 = \Delta(k_+) - \Delta(k_-) = x \cdot \Delta(k_1 \cup k_2)$$

og resultatet følger.

Eksempel.
$$\Delta(\text{trekløver}) - \Delta(\text{uknute}) = x \cdot \Delta(\text{Hopf})$$
og
$$\Delta(\text{Hopf}) - \Delta(\text{uknute} \cup \text{uknute}) = x \cdot \Delta(\text{uknute})\,.$$
Fra lemmaet er $\Delta(\text{uknute} \cup \text{uknute}) = 0$ og fra Regel 1 er $\Delta(\text{uknute}) = 1$, så $\Delta(\text{Hopf}) = x$, og
$$\Delta(\text{trekløver}) = 1 + x^2\,.$$
Dette bekrefter at trekløverknuten ikke er triviell.

Oppgave. Vis at $\Delta(\text{åttetall}) = 1 - x^2$. Dette viser at åttetallsknuten ikke er triviell, og at den har en annen type en trekløverknuten.

Klassifikasjon. Slik kan man fortsette, og generere alle mulige knuteprojeksjoner med et gitt antall krysninger, og beregne Alexander–Conway polynomet til hver knute. Er polynomene forskjellige vet man at man har funnet ulike knuter. Er de like for to knuteprojeksjoner kan man forsøke å deformere den ene over i den andre, for å vise at de gir samme type. Dette går bra en stund, og man kan lage tabeller over antall knuter med krysningstall opp til 9. (Alexander og Briggs, 1927.)

(-3, 5, 7)-pretzel knuten. Men Alexander–Conway polynomet er ikke en perfekt knuteinvariant. Det finnes knuter av forskjellig type som har samme polynom. F.eks. har $(-3, 5, 7)$-pretzel knuten $\Delta(k_{-3,5,7}) = 1$, som er det samme som for uknuten. Man kan derfor ikke bruke Δ for å vise at dette er en ikketriviell knute. Men det finnes andre metoder, som vi ikke rekker å berøre her.

Sammensetning av knuter. To knuter k_1 og k_2 kan settes sammen til en ny knute $k_1 \# k_2$, ved såkalt *sammenhengende sum*: Plassér k_1 og k_2 hver for seg, lag et kutt i begge, og forbind endene ved kuttet i k_1 til endene i kuttet i k_2 uten å innføre noen krysninger.

Primknuter. Hvis verken k_1 eller k_2 er uknuter kaller vi en knute på formen $k_1 \# k_2$ en *sammensatt knute*. Alle andre ikketrivielle knuter kalles *primknuter*.

Det kan vises at enhver ikketriviell knute kan skrives som en sammenhengende sum av primknuter, på en essensielt entydig måte. For å klassifisere knuter er det derfor nok å klassifisere alle primknuter. Det er vanlig å forsøke å liste opp primknute-typene i rekkefølge etter voksende krysningstall.

Tabeller. Kurt Reidemeister avsluttet klassifikasjonen av knuter med opptil 9 krysninger i 1932. John H. Conway listet i 1969 opp alle primknuter med 11 eller færre krysninger, med noen rettelser av Alain Caudron i 1978. Fra 1981 har Morwen Thistlethwaite brukt computere til å lage tabeller over alle knuter med 12, 13, osv. krysninger. Her er noen av tallene:

Antall krysninger	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Antall primknuter	0	0	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988

Det siste jeg har hørt er at klassifikasjonen er brakt frem til alle knuter med høyst 17 krysninger, men at det er ca. 1 million primknuter med 17 krysninger. Hvis man vil bidra til dette studiet er det nok mer interessant å søke etter systematiske mønstre blant primknutene, enn å konkurrere med disse computerberegningene.

Kilde: Colin C. Adams, 'The Knot Book', W.H. Freeman and Company (1994).