KOHOMOLOGI AV KNUTEROM, ETTER VASSILIEV

John Rognes

Vi studerer rommet av knuter i $\mathbb{R}^3$. En knuteinvariant er en klasse i H^0 av dette rommet.

Rom av knuter.

Vi arbeider med parametriserte knuter, med asymptotisk fastlagt oppførsel nær uendelig, oppfattet som parametriserte kurver uten selvskjæringer eller singulære punkter.

La en normal avbildning $\theta : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ være en glatt funksjon hvis graf nærmer seg linjen $L = \{(x, x, x)\}$ asymptotisk nær uendelig (θ skal ha en glatt utvidelse $S^1 \to S^3$ med en fast gitt tangent i basispunktet i S^1). La K være det affine rommet av slike funksjoner.

La $\Sigma \subset K$ være underrommet av funksjoner med selvskjæringer (det finnes $s \neq t$ med $\theta(s) = \theta(t)$) eller singulære punkter ($\theta'(t) = 0$). Dette underromet kalles diskriminantmengden.

Komplementet $K - \Sigma$ er rommet av (normale) knuter.

En endelig approksimasjon.

Vi approksimerer K og rommet av knuter med en voksende følge av endeligdimensjonale underrom.

Se på polynomer $P : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ på formen

$$P(t) = t(t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_d)$$

for et partall d. La $\tilde{\Gamma}_d$ være rommet av avbildninger $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ på formen $t \mapsto (P_1(t), P_2(t), P_3(t))$, hvor alle P_i er som ovenfor. Da er $\tilde{\Gamma}_d$ et affint $(3d)$-dimensjonalt underrom av K.

Generelt står $\tilde{\Gamma}_d$ ikke i generell posisjon til diskriminanten. Vi imbedder $\tilde{\Gamma}_d$ i et større, men fortsatt endeligdimensjonalt rom av polynomielle avbildninger $\tilde{\Gamma}_{3d+2}$, ved substitusjonen $t = s^3 + s$. Da kan vi finne en vilkårlig liten perturbasjon i $\tilde{\Gamma}_{3d+2}$ av $\tilde{\Gamma}_d$, til et underrom Γ_d som står transversalt på Σ.

Dette er vår $(3d)$-dimensjonale approksimasjon til rommet av normale avbildninger, og $\Gamma_d - \Sigma$ er et åpent tett underrom som approksimerer knuterommet.

Ved Weierstrass' approksimasjonssats er enhver normal knute ekvivalent (ambient isotop) med en knute i Γ_d når d er tilstrekkelig stor, og enhver singulær kjede i knuterommet er homolog med en kjede i $\Gamma_d - \Sigma$ for d tilstrekkelig stor. Så for å studere (den svake) homotopitypen til knuterommet $K - \Sigma$ er det tilstrekkelig å se på de normale knutene i Γ_d for d voksende mot uendelig.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Fra Aleksanderdualitet er i denne situasjonen

$$\tilde{H}^i(\Gamma_d - \Sigma) \cong \bar{H}_{3d-1-i}(\Sigma \cap \Gamma_d),$$

hvor $\tilde{H}^*$ betegner redusert kohomologi, og $\bar{H}_*$ står for lukket homologi, dvs. redusert homologi av ettpunktskompaktifiseringen.

Så vi ønsker å beregne $\bar{H}_*(\Sigma \cap \Gamma_d)$.

Konfigurasjoner av selvskjæringer og singulariteter.

Vi stratifiserer diskriminantmengden $\Sigma \cap \Gamma_d$ over de ulike klassene av selvskjæringer og singulariteter som forekommer.

La $A = (a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_\ell)$, $a_\ell \geq 2$ være en følge av hele tall. La $\ell(A) = \ell$ være lengden av følgen, og $w(A) = \sum_{i=1}^{\ell}$ være dens vekt (weight). Siden alle $a_i \geq 2$ er $w(A) \geq 2\ell(A)$.

En A-konfigurasjon er en mengde av $w(A)$ forskjellige punkter i $\mathbb{R}$, delt inn i $\ell(A)$ disjunkte uordnede delmengder $U_1, U_2, \ldots, U_\ell$ med henholdsvis $a_1, \ldots, a_\ell$ punkter i hver.

La b være et helt tall, $b \geq 0$. En b-konfigurasjon er en mengde av b forskjellige uordnede punkter $v_1, \ldots, v_b$ i $\mathbb{R}$. En (A, b)-konfigurasjon J er en A-konfigurasjon $\{U_1, \ldots, U_\ell\}$ og en b-konfigurasjon $\{v_1, \ldots, v_b\}$. Punktene i A-konfigurasjonen behøver ikke være disjunkte fra punktene i b-konfigurasjonen.

Vi sier at en normal avbildning $\theta : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ respekterer en (A, b)-konfigurasjon J som ovenfor hvis (i) for hver i har billedet $\theta(U_i)$ kardinalitet én, og (ii) for hver j er $\theta'(v_j) = 0$. θ skal altså ha selvskjæringer som identifiserer hver av de ℓ punktmengdene $U_1, \ldots, U_\ell$, og ha singulære punkter i hver av de b punktene $v_1, \ldots, v_b$.

To (A, b)-konfigurasjoner J og J' er ekvivalente hvis de kan avbildes til hverandre ved en orienteringsbevarende diffeomorfi av $\mathbb{R}$. Rommet av (A, b)-konfigurasjoner ekvivalent med en gitt konfigurasjon J er en åpen celle med dimensjon $r(J)$ (rank) lik antall geometrisk ulike punkter i konfigurasjonen. Vi har $r(J) \leq w(A) + b$.

Rommet av normale avbildninger som respekterer en gitt (A, b)-konfigurasjon J har kodimensjon $3f(J) = 3(w(A) - \ell(A) + b)$ i rommet av normale avbildninger K. Vi kaller $f(J) = w(A) - \ell(A) + b$ filtrasjonen til konfigurasjonen.

For en jevn d og en (A, b)-konfigurasjon J la $\chi(\Gamma_d, J)$ være rommet av (polynomielle normale) avbildninger i Γ_d som respekterer J.

Lemma 2.1.2. *La d være et partall, og J en (A, b)-konfigurasjon. For nesten alle valg av rom Γ_d holder følgende utsagn:*

(i) For nesten alle (A, b)-konfigurasjoner J' ekvivalent med J er $\chi(\Gamma_d, J')$ et affint underrom av Γ_d med kodimensjon $3f(J)$. Spesielt er det tomt hvis $f(J) > d$.

(ii) Anta $f(J) \leq d$. Hvis $f(J) \leq (3d + 1)/5$ er kodimensjonen av $\chi(\Gamma_d, J')$ i Γ_d lik $3f(J)$ for alle J' ekvivalent med J. (Må komme tilbake til dette.))

(iii) Anta $f(J) < d$. Rommet av J' ekvivalent med J slik at $\chi(\Gamma_d, J') \neq \emptyset$ har kodimensjon $\geq 3(f(J) - d)$, og er tomt hvis $f(J) > 3d$. ((Hvorfor ikke $2d$?))

Vassiliev viser dette ved å innse at de underrommmene Γ_d som ikke oppfyller egenskapene i lemmaet danner et semialgebraisk underrom med positiv kodimensjon i rommet av $(3d)$-dimensjonale affine underrom i $\tilde{\Gamma}_{3d+2}$.

Heretter antar vi at Γ_d er valgt slik at egenskapene i lemmaet er oppfyllt.

Kanter i grafer.

Vi beskriver kombinatoriske data som genererer (A, b)-konfigurasjoner.

La $\Psi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/(t, t') \sim (t', t)$ være rommet av uordnede par av punkter i $\mathbb{R}$. Vi identifiserer $\mathbb{R}$ med diagonalen $\Delta = \{(v, v)\}$ i Ψ.

Gitt en samling forskjellige punkter $\{(t_0, t'_0), \dots, (t_q, t'_q)\}$ i $\Psi - \Delta$ kan vi danne en minimal A-konfigurasjon $\{U_1, \dots, U_\ell\}$ slik at t_i og t'_i ligger i en felles komponent $U_j \subset \mathbb{R}$, $j = j(i)$, for alle i.

Vi kan tenke på punktene $\{t_0, \dots, t_q, t'_0, \dots, t'_q\}$ i $\mathbb{R}$ som hjørner i en abstrakt graf, med en kant mellom t_i og t'_i for alle i. Da er komponentene $\{U_1, \dots, U_\ell\}$ i A-konfigurasjonen lik hjørnene i de forskjellige veisammenhengskomponentene til grafen.

Vi har ulikhetene

$$w(A) - \ell(A) = \sum_{i=1}^{\ell} (a_i - 1) \leq q + 1 \leq \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{2} \leq \binom{w(A)}{2}.$$

Gitt en samling forskjellige punkter $\{v_1, \dots, v_b\}$ i $\mathbb{R}$, som vi kan identifisere med $\Delta \subset \Psi$, bestemmer de en b-konfigurasjon bestående av de samme punktene.

Vi kan tenke på punktene $\{v_1, \dots, v_b\}$ som avmerket på $\mathbb{R}$. La J være (A, b)-konfigurasjonen $(\{U_1, \dots, U_\ell\}, \{v_1, \dots, v_b\})$. En normal avbildning θ respekterer J hvis og bare hvis (i) $\theta(t_i) = \theta(t'_i)$ for alle i, og (ii) $\theta'(v_j) = 0$ for alle j.

Vi sier at en slik endelig samling punkter $(\{(t_0, t'_0), \dots, (t_q, t'_q)\}, \{v_1, \dots, v_b\})$ i Ψ genererer den tilhørende (A, b)-konfigurasjonen J.

To samlinger punkter er ekvivalente hvis de kan avbildes til hverandre med en diffeomorfi av $\mathbb{R}$. Ekvivalente samlinger genererer ekvivalente (A, b)-konfigurasjoner.

Fiksér d, Γ_d og en (A, b)-konfigurasjon J, og anta det finnes en normal avbildning θ i $\chi(\Gamma_d, J)$. Så $\chi(\Gamma_d, J) \neq \emptyset$ og fra Lemma 2.1.2 (iii) er $w(A) - \ell(A) + b = f(J) \leq 3d$. Siden $\ell(A) \leq w(A) - \ell(A)$ vil $\ell(A) \leq 3d$, $b \leq 3d$ og $w(A) \leq 3d + \ell(A) \leq 6d$.

En samling punkter som ovenfor som genererer J vil da oppfylle

$$q + 1 \leq \sum_{i=1}^{\ell} \binom{a_i}{2} \leq \binom{w(A)}{2} \leq \binom{6d}{2}$$

og $b \leq 3d$, så antall punkter i samlingen er opptil begrenset av $\binom{6d}{2} + 3d$.

Lemma 2.3.2. *Hvis N er tilstrekkelig stor finnes det en polynomiell avbildning $\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ som faktoriserer gjennom Ψ, slik at billedene av $2(\binom{6d}{2} + 3d)$ vilkårlige forskjellige punkter i Ψ ligger i generell posisjon i $\mathbb{R}^N$, dvs. er affint uavhengige.*

Resolusjon av diskriminanten.

Fiksér en jevn grad d, et rom av normale avbildninger Γ_d og en polynomiell imbedding $\lambda : \Psi \to \mathbb{R}^N$ som ovenfor. Vi konstruerer nå en resolusjon av diskriminantmengden, som en homologiekvivalens $\sigma \to \Sigma \cap \Gamma_d$.

Se på en normal avbildning $\theta \in \Gamma_d$, en (A, b)-konfigurasjon J slik at θ respekterer J, og en samling punkter

$$(T, V) = (\{(t_0, t'_0), \dots, (t_q, t'_q)\}, \{v_1, \dots, v_b\})$$

i Ψ som genererer J. Via imbeddingen λ utspenner de $(q+1+b)$ punktene $\lambda(t_0, t'_0), \ldots, \lambda(t_q, t'_q), \lambda(v_1, v_1), \ldots, \lambda(v_b, v_b)$ et affint $(q+b)$-simpleks i $\mathbb{R}^n$. Vi oppfatter dette simplekset som et underom i $\Gamma_d \times \mathbb{R}^N$ over $\theta \in \Gamma_d$:

$$\{\theta\} \times \Delta(\lambda(t_0, t'_0), \ldots, \lambda(v_b, v_b)) \subset \Gamma_d \times \mathbb{R}^N$$

Et slikt simpleks kalles et standardsimpleks, og resolusjonen σ er unionen av alle slike standardsimplekser når (A, b), J, θ og de genererende samlingene (T, V) varierer. Det er en naturlig avbildning $\sigma \to \Sigma \cap \Gamma_d$, indusert av projeksjonen $\Gamma_d \times \mathbb{R}^N \to \Gamma_d$.

To standardsimplekser i $\Gamma_d \times \mathbb{R}^N$ svarende til forskjellige genererende samlinger (T_1, V_1) og (T_2, V_2) for J kan ikke møtes i indre punkter, ved Lemma 2.3.2. Så et indre punkt i et standardsimpleks bestemmer den genererende samlingen.

Lemma 2.3.4. *(i) σ er semialgebraisk.*
(ii) Projeksjonen $\sigma \to \Gamma_d \cap \Sigma$ induserer en isomorfi $\bar{H}_*(\sigma) \to \bar{H}_*(\Sigma \cap \Gamma_d)$.

Del (ii) vises ved å triangulere billedet, og se at over det indre av hvert simpleks i billedet $\Sigma \cap \Gamma_d$ danner σ en bunt med fiber det kontraktible standardsimplekset bestemt av en maksimal genererende samling.

Konkret, for en normal avbildning θ la $\{(t_0, t'_0), \ldots, (t_q, t'_q)\}$ være listen av alle par av forskjellige punkter i $\mathbb{R}$ som identifiseres under $\mathbb{R}$, og la $\{v_1, \ldots, v_b\}$ være de singulære punktene til θ. q og b er endelige fordi θ ligger i Γ_d. La J være den genererte (A, b)-konfigurasjonen. Hvis θ ikke er en knute er $f(J) \geq 1$ og fiberen over θ er det affine lukkede $(q+b)$-simplekset utspent av de $(q+1+b)$ punktene $\{\lambda(t_0, t'_0), \ldots, \lambda(v_b, v_b)\}$ i $\mathbb{R}^N$.

Vi kan også beskrive fibrene for projeksjonen av σ på $\mathbb{R}^N$-faktoren. La $p \in \mathbb{R}^N$. Inversbilledet til p for projeksjonen $\sigma \subset \Gamma_d \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ er et (muligens tomt) affint underrom av normale avbildninger $\theta \in \Gamma_d$ som oppfyller en samling krav på formen $\theta(t) = \theta(t')$ eller $\theta'(v) = 0$. Disse kravene genererer en (A, b)-konfigurasjon J, og inversbilledet til p er da $\chi(\Gamma_d, J) \times \{p\}$. Hvis $\theta \in \chi(\Gamma_d, J)$ ligger (θ, p) i det indre av et standardsimpleks i σ.

Filtrasjon av resolusjonsrommet.

For å beregne kohomologien til knuterommet har vi nå redusert oss til å beregne den lukkede homologien til resolusjonen σ av $\Sigma \cap \Gamma_d$, mens d vokser mot uendelig. For dette innfører vi en naturlig filtrasjon av σ, og studerer den assosierte spektralfølgen.

La $\sigma_i \subseteq \sigma$ være unionen av standardsimpleksene i $\Gamma_d \times \mathbb{R}^N$ assosiert med (A, b)-konfigurasjoner J med $f(J) \leq i$. Dette bestemmer en voksende filtrasjon

$$\sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \cdots \subset \sigma_{3d} = \sigma$$

av resolusjonsrommet σ. Filtrasjonen stopper ved $i = 3d$ fra Lemma 2.1.2 (iii).

Vi får en assosiert spektralfølge $\{E^r_{p,q}(d)\}$ av homologisk type, med

$$E^1_{p,q}(d) = \bar{H}_{p+q}(\sigma_p - \sigma_{p-1}),$$

og som konvergerer til $\bar{H}_{p+q}(\sigma)$. Vi reindekserer følgen som for Aleksanderdualitet, og får en spektralfølge $\{E_r^{p,q}(d)\}$ av kohomologisk type med

$$E_r^{p,q}(d) = E_r^{-p,3d-1-q}(d),$$

hvor

$$E_1^{p,q}(d) = \bar{H}_{3d-1-p-q}(\sigma_{-p} - \sigma_{-p-1})$$

og følgen konvergerer til $\tilde{H}^{p+q}(\Gamma_d - \Sigma)$. Vi kaller denne kohomologiske spektralfølgen Vassiliev-spektralfølgen (i grad d).

Spektralfølgen.

Teorem (Vassiliev). *La $d' > d$ være partall, og velg rommene Γ_d og $\Gamma_{d'}$ slik at egenskapene i Lemma 2.1.2 er oppfyllt.*

(A) Gruppene $E_1^{p,q}(d)$ er trivielle hvis ikke $p+q \geq 0$, $p \geq -3d$ og $p \leq -2$.

Vi kaller området hvor $-(3d+1)/5 \leq p \leq -2$ og $p+q \geq 0$ det stabile omraadet i spektralfølgen, og resten av området hvor det finnes ikketrivielle grupper er det ustabile området.

(B) Hvis $p \geq -(3d+1)/5$ er gruppen $E_1^{-p,p}$ uavhengig av d, og kan gis en algebraisk beskrivelse.

(C) Spektralfølgene $\{E_r^{p,q}(d)\}$ og $\{E_r^{p,q}(d')\}$ er isomorfe når enten (i) $r = 1$ og (p,q) er i det d-stabile området, eller hvis $r > 1$ og (p,q) er slik at ingen differensialer av lengde $< r$ når fra det d-ustabile området til bigrad (p,q).

Fra (C) følger det at hver enkelt gruppe $E_r^{p,q}(d)$ stabiliserer når d vokser mot uendelig. Vi kan derfor definere en stabil Vassiliev-spektralfølge $E_r^{p,q}$ som konvergerer til $\tilde{H}^{p+q}(K - \Sigma)$. Leddene $E_\infty^{-p,p}$ danner de assosierte graderte gruppene for en uendelig filtrasjon av $\tilde{H}^0(K - \Sigma)$, dvs. rommet av knuteinvarianter.

En knuteinvariant som overlever til $E_\infty^{-p,p}$ kalles en Vassiliev-invariant av type p. Vassiliev-invariantene av alle endelige typer kalles også invarianter av endelig type.

Uheldigvis vet vi ikke om spektralfølgen oppfyller sterk konvergens, dvs. om alle knuteinvarianter er (en grense av invarianter) av endelig type.