Ringen av Endelige Mengder

John Rognes

29. oktober 2010

Dette foredraget handler om hvorfor man i mange tusen år har regnet med hele tall i stedet for med endelige mengder, og om hvordan det kanskje kan bli slutt på det.

1 Endelige mengder

Endelige mengder er blant de aller mest fundamentale objektene i matematikken.

Fra tidenes morgen har mennesker holdt styr på små mengder, det være seg husdyr eller måneder eller jaktutbytter, først ved å matche dem med knivmerker i et bein eller et trestykke, senere ved å matche dem med de første i en rekke tallord, som "en", "to", "tre", osv. Etter hvert ble det klart at et slikt tellesystem i prinsipp kan videreføres slik at enhver endelig mengde kan nummereres på denne måten.

Noen ganger er det essensielt å holde styr på de enkelte elementene i de endelige mengdene, slik som hvilke husdyr som er dine, og hvilke som er mine. Andre ganger er det kanskje bare antallet elementer som er viktig. Hvis det har vært tre fullmåner siden høstjevndøgn er det snart vintersolverv, uavhengig om det er jeg eller du som teller dem.

Når vi går fra den endelige mengden A til antallet elementer α, ved å telle opp elementene i A, velger vi en en-til-en korrespondanse, eller *bijeksjon*,

$$A \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, \alpha\}$$

mellom A og en følge *naturlige tall.* (For enkelhets skyld følger vi her konvensjonen at 0 et naturlig tall.)

Når vi går fra mengden A til antallet α husker vi at det *eksisterer* en slik bijeksjon, men vi glemmer *valget* av bijeksjonen. To forskjellige valg av bijeksjoner bestemmer en permutasjon

$$\{1, 2, \dots, \alpha\} \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, \alpha\}$$

og det finnes $\alpha! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \alpha$ forskjellige slike. Ved å bare huske antallet elementer i en endelig mengde neglisjerer vi den manglende *entydigheten* av bijeksjonen. (Dette spiller en rolle for mengder med to eller flere elementer.)

2 Disjunkt union

Ganske snart ble det sikkert også aktuelt å slå sammen to endelige mengder, slik som "dine husdyr" og "mine husdyr". Gitt to endelige mengder A og B, uten felles elementer, kan vi danne den disjunkte unionen

$$A \sqcup B \,,$$

som igjen er en endelig mengde.

En eller annen gang har noen lagt merke til at antallet elementer i den disjunkte unionen $A \sqcup B$ ikke avhenger av de spesifike elementene i A eller i B, men bare av hvor mange elementer det er i A og hvor mange elementer det er i B. Hvis det er α elementer i A og β elementer i B kan vi så si at $\alpha + \beta$ skal være antallet elementer i $A \sqcup B$, og dette gir en veldefinert regneoperasjon, nemlig addisjon.

3 Kartesisk produkt

Så ble det kanskje aktuelt å selge et antall tønner med sild, for et antall epler per tønne. Hvis A er mengden tønner, og B er mengden epler som betales for en tønne, svarer det kartesiske produktet $A \times B$ til mengden epler som må betales for alle tønnene. Husk at elementene i $A \times B$ er ordnede par (x, y), der x er et element i A og y er et element i B.

Et annet eksempel kan oppstå hvis vi ordner gjenstander i et rutenett. Hvis A er mengden av rader, og B er mengden av søyler, så svarer $A \times B$ til mengden av ruter, der en rad og en søyle møtes. Hvis det er α elementer i A og β elementer i B er det $\alpha \cdot \beta$ elementer i $A \times B$, og dette gir en veldefinert regneoperasjon, nemlig multiplikasjon.

4 Kategorier

Vi er vant med at samlingen av alle mulige antall, de naturlige tallene, danner en mengde

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, \} \,.$$

Hva er strukturen til samlingen av alle mulige endelige mengder? Vi har sagt at en endelig mengde A har α elementer dersom det finnes en bijeksjon

$$A \xrightarrow{\cong} \{1, 2, \dots, \alpha\} \,.$$

Det betyr at to endelige mengder A og B har like mange elementer dersom det finnes en bijeksjon

$$A \xrightarrow{\cong} B \,.$$

Strukturen av alle mulige endelige mengder har derfor en viktig ekstra bestanddel i tillegg til mengdene A, B, osv., nemlig samlingen av alle bijeksjoner mellom de endelige mengdene. Det er denne bestanddelen, med *valget* av bijeksjon, som glemmes når vi går fra endelige mengder til naturlige tall.

Eilenberg og Mac Lane (se Mac Lane 1971) kaller en slik struktur en *kategori*.

Definisjon 1. *En* kategori $\mathcal{K}$ *består av en samling* objekter A, B, … *og for hvert ordnet par av objekter* (A, B) *en mengde* morfismer $f \colon A \to B$ *fra* A *til* B*. Gitt to morfismer* $f \colon A \to B$ *og* $g \colon B \to C$ *er det definert en* sammensetning $g \circ f \colon A \to C$*. Sammensetningen må oppfylle den* assosiative lov*: hvis* $h \colon C \to D$ *er*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

like som morfismer $A \to D$. (I tillegg finnes det identitetsmorfismer $id_A\colon A \to A$, og enhetslover $f \circ id_A = f = id_B \circ f$, som vi overser.)

Lemma 1. *Det er en kategori $\mathcal{E}$ av endelige mengder og bijeksjoner. Objektene i $\mathcal{E}$ er de endelige mengdene A, B, osv., Morfismene i $\mathcal{E}$ er bijeksjonene*

$$f\colon A \xrightarrow{\cong} B\,.$$

Sammensetningen av to bijeksjoner er gitt på vanlig måte, ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ for alle $x \in A$.

Det er også en kategori $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, av ordnede par (A, B) av endelige mengder, og ordnede par $(f, g)\colon (A, B) \to (C, D)$ av bijeksjoner.

5 Funktorer

Regneoperasjonen $+$ er gitt ved en funksjon

$$+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

som tar paret (α, β) til $\alpha + \beta$. Tilsvarende er regneoperasjonen $\cdot$ gitt ved en funksjon

$$\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

som tar (α, β) til $\alpha \cdot \beta$.

Disjunkt union av endelige mengder er også gitt ved en regel

$$\sqcup\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}\,.$$

Denne regelen har to komponenter, som svarer til de to ingrediensene i en kategori, nemlig objektene og morfismene. Objekt-komponenten har vi allerede snakket om: den sender et par (A, B) av endelige mengder til deres disjunkte union $A \sqcup B$. Morfisme-komponenten sender et par (f, g) av bijeksjoner

$$f\colon A \xrightarrow{\cong} C \qquad \text{og} \qquad g\colon B \xrightarrow{\cong} D$$

til bijeksjonen

$$f \sqcup g\colon A \sqcup B \xrightarrow{\cong} C \sqcup D$$

gitt ved

$$(f \sqcup g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dersom } x \in A, \\ g(x) & \text{dersom } x \in B. \end{cases}$$

Eilenberg og Mac Lane kaller en slik tokomponent-regel en *funktor*:

Definisjon 2. *La $\mathcal{K}$ og $\mathcal{L}$ være kategorier. En* funktor *$F\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ består av en regel som til hvert objekt A i $\mathcal{K}$ tilordner et objekt $F(A)$ i $\mathcal{L}$, og som til hver morfisme $f\colon A \to B$ i $\mathcal{K}$ tilordner en morfisme $F(f)\colon F(A) \to F(B)$ i $\mathcal{L}$. Regelen for morfismer skal være kompatibel med sammensetningene, slik at hvis $g\colon B \to C$ er en morfisme i $\mathcal{K}$ er*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)\colon F(A) \to F(C)\,.$$

(I tillegg kreves kompatibilitet med identitetsmorfismene, $F(id_A) = id_{F(A)}$, som vi overser.)

Vi kan løfte regneartene i mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall til den rikere strukturen vi har på kategorien $\mathcal{E}$ av endelige mengder.

Lemma 2. *Disjunkt union* $\sqcup\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *og kartesisk produkt* $\times\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *er funktorer.*

Bevis. Vi har forklart dette for $\sqcup$. Funktoren $\times$ tar et par endelige mengder (A, B) til det kartesiske produktet $A \times B$, og et par bijeksjoner (f, g) til bijeksjonen $f \times g\colon A \times B \to C \times D$, gitt ved

$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$

for $x \in A$ og $y \in B$. Det er lett å sjekke kompatibilitet med komposisjon. $\square$

6 Semiringer

Regneartene $+$ og $\cdot$ oppfyller assosiative, kommutative og distributive lover

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma) \\
\alpha + \beta &= \beta + \alpha \\
(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \\
\alpha \cdot \beta &= \beta \cdot \alpha \\
\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \\
(\alpha + \beta) \cdot \gamma &= \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma
\end{aligned}$$

for alle naturlige tall $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. (Den siste loven følger fra de to foregående.)

Definisjon 3. *Vi sier at* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ *er en* kommutativ semiring. *(I tillegg har vi null- og enhets-elementer, med passende aksiomer, som vi overser.)*

Det som mangler for at $\mathbb{N}$ skal være en kommutativ ring er eksistensen av additive inverser, altså negative tall. Vi skal komme tilbake til dette.

Vi kan løfte disse assosiative, kommutative og distributive lovene til den berikede situasjonen, der vi ikke glemmer valget av bijeksjoner.

Teorem 1. *Det finnes naturlige, koherente bijeksjoner*

$$\begin{aligned}
(A \sqcup B) \sqcup C &\cong A \sqcup (B \sqcup C) \\
A \sqcup B &\cong B \sqcup A \\
(A \times B) \times C &\cong A \times (B \times C) \\
A \times B &\cong B \times A \\
A \times (B \sqcup C) &\cong A \times B \sqcup A \times C \\
(A \sqcup B) \times C &\cong A \times C \sqcup B \times C
\end{aligned}$$

for alle endelige mengder A, B *og* C.

For eksempel er de assosiative og kommutative lovene for $\times$ gitt ved bijeksjonene som tar $((x, y), z)$ til $(x, (y, z))$, og (x, y) til (y, x), for $x \in A$, $y \in B$ og $z \in C$.

Ordene "naturlige" og "koherente" har tekniske betydninger. At bijeksjonen $A \times B \cong B \times A$ er naturlig sier at for hvert par av bijeksjoner $f \colon A \cong C$ og $g \colon B \cong D$ er sammensetningen

$$A \times B \xrightarrow{f \times g} C \times D \cong D \times C$$

lik sammensetningen

$$A \times B \cong B \times A \xrightarrow{g \times f} D \times C \,.$$

En presis definisjon ble gitt av Eilenberg og Mac Lane. At denne bijeksjonen er koherent sier, blant annet, at sammensetningen $A \times B \cong B \times A \cong A \times B$ er lik identiteten. En presis definisjon ble gitt av Laplaza (1972).

Ved å flikke litt på definisjonene kan vi få de to assosiative lovene, og en av de distributive lovene, til å være en likhet av endelige mengder, ikke bare en bijeksjon. Men vi kan ikke generelt anta at de kommutative lovene og den siste distributive loven, er likheter.

Definisjon 4. *Vi sier at* $(\mathcal{E}, \sqcup, \times)$ *med de naturlige, koherente bijeksjonene ovenfor er en* kommutativ semiring-kategori.

7 Differanser

Med hjulet og seilet kom reiser, handel og regnskap. Hvis jeg har 5 sekker med korn, får inn 7 og 9 sekker, og skal levere 13 sekker, så går det bra hvis de 9 sekkene kommer inn først, og jeg har $5 + 9 - 13 + 7 = 8$ sekker til slutt. Men hvis jeg bare har fått inn de 7 sekkene før jeg skal levere oppstår et problem. Likevel, med nok kredit når det trengs, kan jeg regne med å ha igjen $5 + 7 - 13 + 9 = 8$ sekker til slutt.

For regnskap er det nyttig å kunne se hvor mange elementer som er igjen i en mengde A når en delmengde B er tatt bort. Hvis $B \subset A$ er en delmengde, er antallet elementer i komplementmengden $A - B$ gitt ved differansen $\alpha - \beta$, dersom A har α elementer og B har β elementer. Igjen er det mulig å bare regne med antallene. Antallet elementer i $A - B$ avhenger bare av antallet elementer i A og i B, så lenge B er en eller annen delmengde av A.

Men hva hvis B ikke er en delmengde av A? Hva er $\alpha - \beta$ hvis β er større enn α? Den tradisjonelle løsningen er gitt ved å utvide semiringen av naturlige tall til ringen

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

av alle mulige *hele tall*.

Noen ganger introduseres negative tall geometrisk som punkter på en tall-linje, på den andre siden av 0 fra de positive tallene. Det er da alltid en utfordring å forklare multiplikasjon av to negative tall.

En mer algebraisk metode er å *definere* hele tall som formelle differanser $\alpha - \beta$ av par (α, β) av naturlige tall. Da må vi bare passe på at forskjellige par (α, β) og $(\alpha + \sigma, \beta + \sigma)$ av naturlige tall kan ha samme differanse:

$$\alpha - \beta = (\alpha + \sigma) - (\beta + \sigma) \,.$$

Vi må innføre en ekvivalensrelasjon $\sim$ på mengden $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ av par av naturlige tall, og definerer det hele tallet $\alpha - \beta$ som ekvivalensklassen $[\alpha, \beta]$ til paret (α, β).

Definisjon 5. *Ekvivalensrelasjonen* $\sim$ *på* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *er generert av relasjonene*

$$(\alpha, \beta) \sim (\alpha + \sigma, \beta + \sigma)$$

for alle naturlige tall α, β *og* σ*. De hele tall* $\mathbb{Z}$ *er mengden av ekvivalensklasser*

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\!\sim .$$

8 Ringer

Vi identifiserer $\mathbb{N}$ med en delmengde av $\mathbb{Z}$ ved å sende $\alpha \in \mathbb{N}$ til ekvivalensklassen $[\alpha, 0]$. Regneartene $+$ og $\cdot$ kan utvides fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$ ved reglene

$$[\alpha, \beta] + [\gamma, \delta] = [\alpha + \gamma, \beta + \delta]$$

og

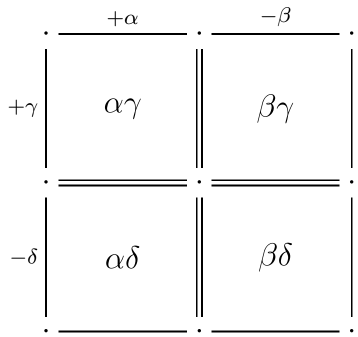
$$[\alpha, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma]$$

der vi skriver $\alpha\gamma$ for $\alpha \cdot \gamma$, osv.

Produktformelen kan motiveres ved

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta) \cdot (\gamma - \delta) &= \alpha \cdot (\gamma - \delta) - \beta \cdot (\gamma - \delta) \\ &= \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta = (\alpha\gamma + \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma) .\end{aligned}$$

For å visualisere denne utregningen kan vi betrakte $\alpha - \beta$ som differansen mellom det venstre bidraget og det høyre bidraget i følgende diagram, og tilsvarende med $\gamma - \delta$ som differansen mellom det øvre bidraget og det nedre bidraget.



Produktformelen er veldefinert, fordi

$$\begin{aligned}[\alpha + \sigma, \beta + \sigma] \cdot [\gamma + \tau, \delta + \tau] &= [(\alpha + \sigma)(\gamma + \tau) + (\beta + \sigma)(\delta + \tau), \\ &\qquad (\alpha + \sigma)(\delta + \tau) + (\beta + \sigma)(\gamma + \tau)] \\ &= [\alpha\gamma + \alpha\tau + \sigma\gamma + \sigma\tau + \beta\delta + \beta\tau + \sigma\delta + \sigma\tau, \\ &\qquad \alpha\delta + \alpha\tau + \sigma\delta + \sigma\tau + \beta\gamma + \beta\tau + \sigma\gamma + \sigma\tau] \\ &= [\alpha\gamma + \beta\delta + \pi, \alpha\delta + \beta\gamma + \pi]\end{aligned}$$

med

$$\pi = \alpha\tau + \sigma\gamma + \sigma\tau + \beta\tau + \sigma\delta + \sigma\tau$$

er samme ekvivalensklasse som $[\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma]$. Dette kan visualiseres som følger:

	$+\alpha$	$+\sigma$	$-\beta$	$-\sigma$
$+\gamma$	$\alpha\gamma$	$\sigma\gamma$	$\beta\gamma$	$\sigma\gamma$
$+\tau$	$\alpha\tau$	$\sigma\tau$	$\beta\tau$	$\sigma\tau$
$-\delta$	$\alpha\delta$	$\sigma\delta$	$\beta\delta$	$\sigma\delta$
$-\tau$	$\alpha\tau$	$\sigma\tau$	$\beta\tau$	$\sigma\tau$

Lemma 3. *Regneartene $+$ og $\cdot$ oppfyller de assosiative, kommutative og distributive lover, for alle hele tall i $\mathbb{Z}$.*

Hvert helt tall $[\alpha, \beta]$ har nå en additiv invers, nemlig

$$-[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]\,,$$

med $[\alpha, \beta] + [\beta, \alpha] = [0, 0]$. Eksistensen av additive inverser i $\mathbb{Z}$ sikrer at:

Teorem 2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *er en kommutativ ring.*

Nå kommer vi til det sentral spørsmålet i dette foredraget:

> **Kan vi introdusere additive inverser i semiring-kategorien** $(\mathcal{E}, \sqcup, \times)$ **av endelige mengder, slik at resultatet er en ring-kategori** $(\mathcal{Q}, \oplus, \otimes)$ **av virtuelle mengder?**

Med andre ord, kan vi regne med addisjon $\sqcup$ og multiplikasjon $\times$ med formelle differanser $A - B$ mellom endelige mengder, ikke bare mellom antallet elementer i disse mengdene?

Regning i en slik ring-kategori (merket (?) i diagrammet nedenfor) vil beholde mer informasjon om de endelige mengdene enn antallet elementer, siden den også inneholder informasjon om de $\alpha!$ ulike valgene av bijeksjoner

$$A \xrightarrow{\cong} B\,,$$

dersom A og B har α elementer, ikke bare eksistensen av slike bijeksjoner.

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\text{kommutative}\\ \text{semiringer}\end{array} & \begin{array}{c}\text{kommutative}\\ \text{ringer}\end{array} \\
\text{kategorier} & \begin{array}{c}\text{endelige mengder}\\ \mathcal{E},\sqcup,\times\end{array} \arrow[r] \arrow[d] & (?) \arrow[d] \\
\text{mengder} & \begin{array}{c}\text{naturlige tall}\\ \mathbb{N},+,\cdot\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\text{hele tall}\\ \mathbb{Z},+,\cdot\end{array}
\end{tikzcd}$$

9 Quillens konstruksjon

Dan Quillen (se Grayson 1976) definerte en kategori

$$\mathcal{Q} = (-\mathcal{E})\mathcal{E}$$

av formelle differanser av endelige mengder, som vi kan kalle *virtuelle mengder*, som føyer additive inverser til kategorien $(\mathcal{E}, \sqcup)$.

Som i tilfellet med $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ starter vi med kategorien $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ av par (A, B) av endelige mengder. Vi tenker på A som "positiv", og B som "negativ". En morfisme $(A, B) \to (C, D)$ i $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ er et par av bijeksjoner (f, g) med $f\colon A \cong C$ og $g\colon B \cong D$, som før. Vi ønsker å tenke på paret (A, B) som en representant for differansen $A - B$. Spesielt vil vi tenke på (A, B) som en virtuell mengde med $\alpha - \beta$ elementer, hvis A har α elementer og B har β elementer.

En viktig forskjell fra det foregående tilfellet er at, i stedet for å si at visse par (A, B) og $(A \sqcup S, B \sqcup S)$ skal være *like*, slik vi gjør når vi går fra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$ ved den kanoniske avbildningen til ekvivalensklassene for $\sim$, vil vi bare innføre en ny morfisme

$$(A, B) \longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S)$$

mellom disse to objektene. Ideen er at i en kategori er det ikke alltid realistisk å be om at to objekter er like, men vi kan be om at det skal finnes en morfisme mellom dem.

Definisjon 6. *La $\mathcal{Q} = (-\mathcal{E})\mathcal{E}$ være utvidelsen av kategorien $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ av par (A, B) av endelige mengder, der det er tilføyd en morfisme*

$$\langle S \rangle\colon (A, B) \longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S)$$

for alle endelige mengder A, B og S. Komposisjonen

$$(A, B) \xrightarrow{\langle S \rangle} (A \sqcup S, B \sqcup S) \xrightarrow{\langle U \rangle} (A \sqcup S \sqcup U, B \sqcup S \sqcup U)$$

er lik morfismen $\langle S \sqcup U \rangle$ fra (A, B).

(For å forenkle notasjonen vil vi anta at den assosiative lov for $\sqcup$ er en likhet, ikke bare en isomorfi, som vi nevnte at er mulig.)

Lemma 4. *Morfismene $(A, B) \to (C, D)$ i $\mathcal{Q}$ er alle på formen $(f, g) \circ \langle S \rangle$, der S er en endelig mengde, og $f\colon A \sqcup S \cong C$ og $g\colon B \sqcup S \cong D$ er bijeksjoner. To sammensetninger $(f, g) \circ \langle S \rangle$ og $(f', g') \circ \langle S' \rangle$ er like hvis og bare hvis det finnes en bijeksjon $h\colon S \cong S'$ slik at $f = f' \circ (id_A \sqcup h)$ og $g = g' \circ (id_B \sqcup h)$.*

10 Gruppe-komplettering

Vi identifiserer $\mathcal{E}$ med en underkategori av $\mathcal{Q}$ ved å sende en endelig mengde A til $(A, \varnothing)$.

Funktoren $\sqcup\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ kan da utvides til en funktor

$$\oplus\colon \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

ved regelen

$$(A, B) \oplus (C, D) = (A \sqcup C, B \sqcup D)$$

for objektene, og en helt tilsvarende regel for de morfismene som er gitt ved par av par av bijeksjoner. Paret av morfismer

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &\colon (A, B) \longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S)\\ \langle T\rangle &\colon (C, D) \longrightarrow (C \sqcup T, D \sqcup T)\end{aligned}$$

gir en morfisme $(\langle S\rangle, \langle T\rangle)$ i $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$. Vi må spesifisere hvordan $\oplus$ sender denne til en morfisme

$$\langle S\rangle \oplus \langle T\rangle\colon (A \sqcup C, B \sqcup D) \longrightarrow (A \sqcup S \sqcup C \sqcup T, B \sqcup S \sqcup D \sqcup T)$$

i $\mathcal{Q}$. Quillen definerer $\langle S\rangle \oplus \langle T\rangle$ som sammensetningen av

$$\langle S \sqcup T\rangle\colon (A \sqcup C, B \sqcup D) \longrightarrow (A \sqcup C \sqcup S \sqcup T, B \sqcup D \sqcup S \sqcup T)$$

og paret av bijeksjoner

$$(f, g)\colon (A \sqcup C \sqcup S \sqcup T, B \sqcup D \sqcup S \sqcup T) \cong (A \sqcup S \sqcup C \sqcup T, B \sqcup S \sqcup D \sqcup T)$$

der f bytter om C og S, og g bytter om D og S.

Lemma 5. *Regelen $\oplus\colon \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ er en funktor. Mer eksplisitt, gitt morfismer*

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &\colon (A, B) \longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S)\\ \langle T\rangle &\colon (C, D) \longrightarrow (C \sqcup T, D \sqcup T)\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\langle U\rangle &\colon (A \sqcup S, B \sqcup S) \longrightarrow (A \sqcup S \sqcup U, B \sqcup S \sqcup U)\\ \langle V\rangle &\colon (C \sqcup T, D \sqcup T) \longrightarrow (C \sqcup T \sqcup V, D \sqcup T \sqcup V)\end{aligned}$$

er sammensetningen

$$(\langle U\rangle \oplus \langle V\rangle) \circ (\langle S\rangle \oplus \langle T\rangle)$$

lik summen

$$\langle S \sqcup U\rangle \oplus \langle T \sqcup V\rangle = (\langle U\rangle \circ \langle S\rangle) \oplus (\langle V\rangle \circ \langle T\rangle)\,.$$

Lemma 6. *Det finnes naturlige, koherente par av bijeksjoner*

$$\begin{aligned}((A, B) \oplus (C, D)) \oplus (E, F) &\cong (A, B) \oplus ((C, D) \oplus (E, F))\\ (A, B) \oplus (C, D) &\cong (C, D) \oplus (A, B)\end{aligned}$$

for alle objekter (A, B), (C, D) og (E, F) i $\mathcal{Q}$.

Hvert objekt (A, B) i $\mathcal{Q}$ har nå (B, A) som en additiv invers, opp til en kjede morfismer:

$$(A, B) \oplus (B, A) = (A \sqcup B, B \sqcup A) \cong (A \sqcup B, A \sqcup B) \overset{\langle A \sqcup B \rangle}{\longleftarrow} (\varnothing, \varnothing)$$

Når det gjelder den additive strukturen i $\mathcal{E}$, $\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ er derfor Quillens kategori $\mathcal{Q}$ egnet til å fylle plassen i diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{kommutative monoider} & \text{abelske grupper} \\
\text{kategorier} & \text{endelige mengder } \mathcal{E}, \sqcup \arrow[r] \arrow[d] & \text{virtuelle mengder } \mathcal{Q}, \oplus \arrow[d] \\
\text{mengder} & \text{naturlige tall } \mathbb{N}, + \arrow[r] & \text{hele tall } \mathbb{Z}, +
\end{tikzcd}$$

11 Thomasons "phony multiplication"

Hva med den multiplikative strukturen? Kan funktoren $\times \colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ utvides til en funktor

$$\otimes \colon \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}$$

slik at $(\mathcal{Q}, \oplus, \otimes)$ er en kommutativ ring-kategori?

Det er kanskje forbløffende at svaret er nei, med disse definisjonene. Bob Thomason (1980) påpekte at en "åpenbar" definisjon av en slik funktor $\otimes$ ikke er veldefinert, av en forholdsvis subtil grunn, som vi nå skal se nærmere på.

På objekt-nivået må $\otimes$ være gitt ved formelen

$$(A, B) \otimes (C, D) = (A \times C \sqcup B \times D, A \times D \sqcup B \times C)\,,$$

eller en variant av denne der produktene kanskje er skrevet i en annen rekkefølge. (Vi velger denne rekkefølgen. Enhver annen valgt rekkefølge vil lede til det samme problemet.)

For å gjøre formlene lettere å lese utelater vi tegnet for kartesisk produkt, slik at vi skriver AC i stedet for $A \times C$, osv. Produktet $(A, B) \otimes (C, D)$ har da en positiv del gitt ved øvre venstre og nedre høyre kvadrant i følgende diagram, og en negativ del gitt ved nedre venstre og øvre høyre kvadrant:

$$\begin{array}{c|c||c|}
 & {\scriptstyle +A} & {\scriptstyle -B} \\
\hline
{\scriptstyle +C} & AC & BC \\
\hline\hline
{\scriptstyle -D} & AD & BD \\
\hline
\end{array}$$

En tilsvarende regel vil virke for de morfismene som er gitt som par av par av bijeksjoner. Hvis $f\colon A \cong A'$, $g\colon B \cong B'$, $h\colon C \cong C'$, $i\colon D \cong D'$ er fire bijeksjoner, så er $(f,g)\colon (A,B) \to (A',B')$ og $(h,i)\colon (C,D) \to (C',D')$ morfismer i $\mathcal{Q}$, og vi definerer $(f,g) \otimes (h,i)$ som paret av bijeksjoner

$$(f \times h \sqcup g \times i, f \times i \sqcup g \times h)\colon (A,B) \otimes (C,D) \longrightarrow (A',B') \otimes (C',D') \,.$$

Problemet er hvordan $\otimes$ skal sende et par av morfismer

$$\begin{aligned} \langle S \rangle \colon (A,B) &\longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S) \\ \langle T \rangle \colon (C,D) &\longrightarrow (C \sqcup T, D \sqcup T) \end{aligned}$$

i $\mathcal{Q}$ til en morfisme

$$\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle \colon (A,B) \otimes (C,D) \longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S) \otimes (C \sqcup T, D \sqcup T)$$

i $\mathcal{Q}$, *slik at* $\otimes$ *blir en funktor*. Her skal $\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle$ være en morfisme fra

$$(A,B) \otimes (C,D) = (AC \sqcup BD, AD \sqcup BC)$$

til

$$\begin{aligned} &(A \sqcup S, B \sqcup S) \otimes (C \sqcup T, D \sqcup T) \\ &\qquad = ((A \sqcup S)(C \sqcup T) \sqcup (B \sqcup S)(D \sqcup T), (A \sqcup S)(D \sqcup T) \sqcup (B \sqcup S)(C \sqcup T)) \end{aligned}$$

som er i bijeksjon med

$$\begin{aligned} &(AC \sqcup AT \sqcup SC \sqcup ST \sqcup BD \sqcup BT \sqcup SD \sqcup ST, AD \sqcup AT \sqcup SD \sqcup ST \sqcup BC \sqcup BT \sqcup SC \sqcup ST) \\ &\qquad\qquad \cong (AC \sqcup BD \sqcup P, AD \sqcup BC \sqcup P) \,, \end{aligned}$$

der

$$P = AT \sqcup SC \sqcup ST \sqcup BT \sqcup SD \sqcup ST \,.$$

Her har vi en åpenbar morfisme

$$\langle P \rangle \colon (A,B) \otimes (C,D) \longrightarrow (AC \sqcup BD \sqcup P, AD \sqcup BC \sqcup P) \,,$$

og $\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle$ må være sammensetningen av $\langle P \rangle$ og et par av bijeksjoner

$$(f,g)\colon (AC \sqcup BD \sqcup P, AD \sqcup BC \sqcup P) \cong (A \sqcup S, B \sqcup S) \otimes (C \sqcup T, D \sqcup T) \,.$$

Følgende visualisering kan være nyttig:

	$+A$	$+S$	$-B$	$-S$
$+C$	AC	SC	BC	SC
$+T$	AT	ST	BT	ST
$-D$	AD	SD	BD	SD
$-T$	AT	ST	BT	ST

Hvilke bijeksjoner skal man velge? De skal gi en naturlig en-til-en korrespondanse (via P) mellom summandene i

$$(A \sqcup S)(C \sqcup T) \sqcup (B \sqcup S)(D \sqcup T) \cong AC \sqcup AT \sqcup SC \sqcup ST \sqcup BD \sqcup BT \sqcup SD \sqcup ST$$

utenom AC og BD, og summandene i

$$(A \sqcup S)(C \sqcup T) \sqcup (B \sqcup S)(D \sqcup T) \cong AD \sqcup AT \sqcup SD \sqcup ST \sqcup BC \sqcup BT \sqcup SC \sqcup ST$$

utenom AD og BC. Det er klart at AT må matches med AT, SC med SC, BT med BT og SD med SD. Da gjenstår to kopier av ST på begge sider. Kjernen i problemet er hvordan disse to kopiene av ST skal matches opp. Det er to måter å gjøre det på, og vi kan ikke velge begge.

Hvis vi velger å matche den positive kopien av ST fra $(A \sqcup S)(C \sqcup T)$ med den negative kopien fra $(A \sqcup S)(D \sqcup T)$, and dermed matche den positive kopien av ST fra $(B \sqcup S)(D \sqcup T)$

med den negative kopien fra $(B \sqcup S)(C \sqcup T)$, får vi følgende identifikasjoner:

$$\begin{array}{c|c|c||c|c|}
 & +A & +S & -B & -S \\ \hline
+C & AC & SC & BC & SC \\ \hline
+T & AT & ST & BT & ST \\ \hline\hline
-D & AD & SD & BD & SD \\ \hline
-T & AT & ST & BT & ST \\ \hline
\end{array}$$

(Den andre identifikasjonen leder til essensielt det samme problemet.)

12 Manglende funktorialitet

Lemma 7. *Regelen* $\otimes \colon \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ *er ikke en funktor. Mer presist, gitt morfismer*

$$\begin{aligned}
\langle S \rangle \colon (A, B) &\longrightarrow (A \sqcup S, B \sqcup S) \\
\langle T \rangle \colon (C, D) &\longrightarrow (C \sqcup T, D \sqcup T)
\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle \colon (A \sqcup S, B \sqcup S) &\longrightarrow (A \sqcup S \sqcup U, B \sqcup S \sqcup U) \\
\langle V \rangle \colon (C \sqcup T, D \sqcup T) &\longrightarrow (C \sqcup T \sqcup V, D \sqcup T \sqcup V)
\end{aligned}$$

er sammensetningen

$$(\langle U \rangle \otimes \langle V \rangle) \circ (\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle)$$

generelt ikke lik produktet

$$\langle S \sqcup U \rangle \otimes \langle T \sqcup V \rangle = (\langle U \rangle \circ \langle S \rangle) \otimes (\langle V \rangle \circ \langle T \rangle)\,,$$

selv om begge er morfismer fra $(A, B) \otimes (C, D)$ *til*

$$(A \sqcup S \sqcup U, B \sqcup S \sqcup U) \otimes (C \sqcup T \sqcup V, D \sqcup T \sqcup V)\,.$$

Bevis. Her gjelder det å holde tungen rett i munnen. Det viser seg at problemet bare gjelder produktet UT, slik at S og V ikke spiller noen rolle.

Morfismen $\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle$ er gitt av identifikasjonen valgt ovenfor mellom de positive og de negative summandene i

$$(A \sqcup S, B \sqcup S) \otimes (C \sqcup T, D \sqcup T)$$

som ikke er i $(A, B) \otimes (C, D)$.

Da må morfismen $\langle U \rangle \otimes \langle V \rangle$ være gitt etter samme regel, ved følgende identifikasjoner:

	$+(A \sqcup S)$	$+U$	$-(B \sqcup S)$	$-U$
$+(C \sqcup T)$	$(A \sqcup S)(C \sqcup T)$	$U(C \sqcup T)$	$(B \sqcup S)(C \sqcup T)$	$U(C \sqcup T)$
$+V$	$(A \sqcup S)V$	UV	$(B \sqcup S)V$	UV
$-(D \sqcup T)$	$(A \sqcup S)(D \sqcup T)$	$U(D \sqcup T)$	$(B \sqcup S)(D \sqcup T)$	$U(D \sqcup T)$
$-V$	$(A \sqcup S)V$	UV	$(B \sqcup S)V$	UV

Sammensetningen $(\langle U \rangle \otimes \langle V \rangle) \circ (\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle)$ er gitt ved identifikasjonene:

	$+A$	$+S$	$+U$	$-B$	$-S$	$-U$
$+C$	AC	SC	UC	BC	SC	UC
$+T$	AT	ST	UT	BT	ST	UT
$+V$	AV	SV	UV	BV	SV	UV
$-D$	AD	SD	UD	BD	SD	UD
$-T$	AT	ST	UT	BT	ST	UT
$-V$	AV	SV	UV	BV	SV	UV

På den annen side er produktet av morfismene

$$\langle S \sqcup U \rangle = \langle U \rangle \circ \langle S \rangle \colon (A, B) \longrightarrow (A \sqcup S \sqcup U, B \sqcup S \sqcup U)$$

og

$$\langle T \sqcup V \rangle = \langle V \rangle \circ \langle T \rangle \colon (C, D) \longrightarrow (C \sqcup T \sqcup V, D \sqcup T \sqcup V)$$

definert ved hjelp av identifikasjonene:

	$+A$	$+S$	$+U$	$-B$	$-S$	$-U$
$+C$	AC	SC	UC	BC	SC	UC
$+T$	AT	ST	UT	BT	ST	UT
$+V$	AV	SV	UV	BV	SV	UV
$-D$	AD	SD	UD	BD	SD	UD
$-T$	AT	ST	UT	BT	ST	UT
$-V$	AV	SV	UV	BV	SV	UV

Den eneste forskjellen gjelder de to positive og de to negative kopiene av UT. I den sammensatte morfismen

$$(\langle U \rangle \otimes \langle V \rangle) \circ (\langle S \rangle \otimes \langle T \rangle)$$

er $(+U)(+T)$ identifisert med $(-U)(+T)$, mens i produkt-morfismen

$$\langle S \sqcup U \rangle \otimes \langle T \sqcup V \rangle$$

er $(+U)(+T)$ identifisert med $(+U)(-T)$. De to morfismene er ikke like, men skiller seg ad på samme måte som bijeksjonen

$$UT \sqcup UT \cong UT \sqcup UT$$

som bytter om de to kopiene av UT er forskjellig fra identiteten. $\square$

13 Ring-komplettering

I et felles arbeide har Baas, Dundas, Richter og Rognes (2009) nå konstruert ring-kompletteringer for en stor klasse semiring-kategorier, deriblant kategorien $\mathcal{E}$ av endelige mengder. Konstruksjonen av denne ring-kompletteringen $\overline{\mathcal{E}}$ er mer komplisert enn Quillens $\mathcal{Q} = (-\mathcal{E})\mathcal{E}$. Jeg ville ikke forsøke å forklare den i dette foredraget, men ønsket heller å påpeke hvor fundamentalt dette problemet er, og hvor vanskeligheten i det tidligere forsøket på en løsning lå skjult.

14 Sfærer

Noen ganger er man villig til å gå videre fra kategorien $\mathcal{E}$ til dens *klassifiserende rom* $|\mathcal{E}|$, som er det topologiske rommet man får ved å begynne med ett punkt for hvert objekt A i $\mathcal{E}$, tegne inn en kant fra A til B for hver morfisme $f\colon A \to B$ i $\mathcal{E}$, og deretter lime inn et q-dimensjonalt simpleks for hvert q-tuppel av morfismer $(f_1, \dots, f_q)$ som er slik at sammensetningen $f_1 \circ \cdots \circ f_q$ er definert, for alle $q \geq 2$.

Ved Barratt–Priddy–Quillen teoremet er de klassifiserende rommene $|\mathcal{Q}|$ og $|\overline{\mathcal{E}}|$ homotopi-ekvivalente med rommet

$$\Omega^\infty S := \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega^n S^n$$

av basispunkt-bevarende avbildninger $f\colon S^n \to S^n$, der S^n er den n-dimensjonale sfæren, og n er vilkårlig stor. Rommet $\Omega^\infty S$ kan kalles et kommutativt ring-rom, eller mer presist et gruppe-komplett E_∞ ring-rom.

Ring-kompletteringen $\overline{\mathcal{E}}$ må være mer kompleks enn $\mathcal{Q}$, siden den skal inneholde den rike multiplikative strukturen som finnes i $\Omega^\infty S$.

Referanser

[1] N. A. Baas, B. I. Dundas, B. Richter, and J. Rognes, *Ring completion of rig categories* (2009). arXiv:0706.0531 preprint.

[2] Daniel Grayson, *Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen)*, Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Springer, Berlin, 1976, pp. 217–240. Lecture Notes in Math., Vol. 551.

[3] Miguel L. Laplaza, *Coherence for distributivity*, Coherence in categories, Springer, Berlin, 1972, pp. 29–65. Lecture Notes in Math., Vol. 281.

[4] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[5] R. W. Thomason, *Beware the phony multiplication on Quillen's $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$*, Proc. Amer. Math. Soc. **80** (1980), no. 4, 569–573.