RIEMANN-HYPOTESEN

John Rognes

3. mai 2002

1. Riemann–von Mangold formelen

For komplekse tall s med realdel $\Re(s) > 1$, la

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} .$$

Her løper produktet over alle primtall p. Euler viste denne *produktformelen* som en formell identitet i 1735.

For reelle tall x, la

$$\pi(x) = \#\{p \text{ primtall} \mid p \leq x\}$$

være antallet primtall som er mindre enn eller lik x. Gauss observerte i 1792 eller 1793 at tettheten av primtall nær x synes å være omtrent $1/\log x$, slik at $\pi(x)$ kan ventes å vokse som det *logaritmiske integralet*

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t} \sim \frac{x}{\log x} .$$

(Integralet er en "Cauchy prinsipal-verdi" ved $t = 1$. Vi skriver $f(x) \sim g(x)$ dersom $f(x)/g(x) \to 1$ når $x \to \infty$.)

I sin artikkel "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse," publisert i 1859, viste Riemann at $\zeta(s)$ har en entydig utvidelse til en kompleks analytisk funksjon som er definert for alle komplekse tall $s \neq 1$. Denne *Riemann zeta-funksjonen* har en enkel pol i $s = 1$, og har to typer nullpunkter: de *trivielle nullpunktene* $s = -2k$ for naturlige tall k, og de *ikke-trivielle nullpunktene* $s = \rho$, som alle ligger i den *kritiske stripen* hvor $0 \leq \Re(s) \leq 1$. Midtlinjen $\Re(s) = \frac{1}{2}$ i den kritiske stripen kalles den *kritiske linjen*, og nullpunktene til zeta-funksjonen med $\Re(\rho) = \frac{1}{2}$ kalles *kritiske nullpunkter*.

La

$$\Pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/m})}{m} = \pi(x) + \frac{\pi(x^{1/2})}{2} + \frac{\pi(x^{1/3})}{3} + \dots$$

være det vektede antallet primtalls-potenser $p^m \leq x$, der m-te potensene regnes med vekt $1/m$. Da kan $\pi(x)$ gjenvinnes fra $\Pi(x)$ ved Möbius-inversjon:

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \Pi(x^{1/m}) = \Pi(x) - \frac{\Pi(x^{1/2})}{2} - \frac{\Pi(x^{1/3})}{3} \mp \dots$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

der Möbius-funksjonen $\mu(m)$ er lik $(-1)^r$ dersom m er et produkt av r forskjellige primtall, og null ellers.

Riemann ga så følgende analytiske formel for $\Pi(x)$, som igjen gir en formel for $\pi(x)$. (Riemanns argument har mangler; von Mangold ga et fullstendig bevis i 1895.)

Riemann–von Mangold formelen. *For $x > 1$ er*

$$\Pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t} - \log 2 \,,$$

der summen løper over de ikke-trivielle nullpunktene ρ til $\zeta(s)$.

Integralet $\int_x^{\infty} dt/t(t^2-1)\log t$ er meget lite for store x. Dermed er det leddet $\mathrm{Li}(x)$, som vokser som $x/\log x$, og leddene $\mathrm{Li}(x^{\rho})$ som dominerer veksten av $\Pi(x)$, og dermed av $\pi(x)$.

Denne formelen viser hvordan null-punktene til zeta-funksjonen er nært knyttet til veksten av $\pi(x)$. Kunnskap om plasseringen av de ikke-trivielle nullpunktene til Riemann zeta-funksjonen er derfor viktig for forståelsen av primtallenes fordeling.

2. Riemann-hypotesen

Riemann ser på $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ som en funksjon av t for komplekse t innen visse grenser, og sier: "Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind." Han sier altså at det er svært sannsynlig at følgende påstand holder:

Riemann-hypotesen. *De ikke-trivielle nullpunktene til $\zeta(s)$ har realdel lik $\frac{1}{2}$.*

Riemann-hypotesen sier altså at alle ikke-trivielle nullpunkter er kritiske nullpunkter. For eksempel er de første fem null-punktene til $\zeta(s)$ med positiv imaginærdel lik

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{1}{2} + 14,134735i \\
\rho_2 &= \frac{1}{2} + 21,022040i \\
\rho_3 &= \frac{1}{2} + 25,010856i \\
\rho_4 &= \frac{1}{2} + 30,424978i \\
\rho_5 &= \frac{1}{2} + 32,935057i
\end{aligned}$$

med 8 gjeldende siffer.

Riemann fortsetter: "Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien."

La $\theta = \sup \Re(\rho)$ være minste øvre skranke for realdelen av nullpunktene til $\zeta(s)$. Riemann-von Mangold formelen gir da at

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\theta} \log x) \,.$$

(Dvs. forholdet $(\pi(x) - \mathrm{Li}(x))/(x^{\theta}\log x)$ er begrenset når $x \to \infty$.)

Vi vet at $\theta \leq 1$, og Riemann-hypotesen sier at $\theta = \frac{1}{2}$. Hvis vi visste at $\theta < 1$ ville det følge at $\mathrm{Li}(x)$ dominerer de andre leddene, som igjen ville implisere:

Primtalls-satsen.

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)\,.$$

men det er ennå ikke kjent om $\theta \neq 1$. I stedet ble primtalls-satsen vist direkte av både Hadamard og de la Vallée Poussin i 1896, ved å vise den svakere påstanden at zeta-funksjonen ikke har noen nullpunkter med realdel $\Re(\rho) = 1$.

Riemann-hypotesen impliserer at

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{1/2}\log x)\,.$$

Dette ville være et nærmest optimalt estimat, siden Littlewood har bevist at differansen $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ svinger mellom både positive og negative verdier med absoluttverdi som vokser som $\mathrm{Li}(x^{1/2})\log\log\log x$ eller mer.

3. Riemanns metoder

I mer detalj viser Riemann at integralet

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1}\,\frac{dx}{x}$$

utvider rekken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ til en kompleks analytisk funksjon som er definert på hele det komplekse s-planet med unntak av en enkel pol i $s = 1$.

Integrasjonen følger den reelle aksen fra $+\infty$ mot 0, sirkler om origo en gang i positiv omløpsretning, og følger den reelle aksen tilbake mot $+\infty$. I integranden for $\zeta(s)$ er $(-x)^s = \exp(s\log(-x))$, hvor imaginærdelen til $\log(-x)$ begynner nær $-\pi$ og vokser til $+\pi$. Som vanlig er

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^s\,\frac{dx}{x}$$

lik Eulers Gamma-funksjon, med $\Gamma(s) = (s-1)!$ når s er et naturlig tall. Gamma-funksjonen er aldri null, og har enkle poler i de ikke-positive hele tallene $s = 0, -1, -2, \dots$.

Riemann viser videre *funksjonal-likningen*

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Gamma(\frac{1-s}{2})\pi^{(1-s)/2}\zeta(1-s)\,.$$

Hvis vi lar

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

så er $\xi(s)$ en hel kompleks analytisk funksjon, dvs. den er definert i hele det komplekse s-planet, og funksjonal-likningen sier at $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Eulers produktformel viser at verken $\zeta(s)$ eller $\xi(s)$ har noen nullpunkter for $\Re(s) > 1$. Ved funksjonal-likningen har $\xi(s)$ heller ingen nullpunkter for $\Re(s) < 0$, mens $\zeta(s)$ har enkle nullpunkter i de negative partallene $s = -2k$, som svarer til polene i $s \cdot \Gamma(s/2)$. Dette er de trivielle nullpunktene til zeta-funksjonen.

Innen den kritiske stripen ($0 \leq \Re(s) \leq 1$) har $\zeta(s)$ og $\xi(s)$ de samme nullpunktene, og dette er de ikke-trivielle nullpunktene til zeta-funksjonen. Funksjonallikningen forteller at dersom ρ er et ikke-trivielt nullpunkt, så er også $(1-\rho)$ det. De ikke-trivielle nullpunktene ligger altså symmetrisk om $s = \frac{1}{2}$.

Riemann bruker så en produktutvikling

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_\rho (1 - s/\rho)$$

der $\xi(0) = 1/2$ og ρ løper over nullpunktene til $\xi(s)$, som er de samme som de ikke-trivielle nullpunktene til $\zeta(s)$. Dette gir et uttrykk for $\log \zeta(s)$ som involverer summen

$$\sum_\rho \log(1 - s/\rho)$$

der ρ løper over de ikke-trivielle nullpunktene til $\zeta(s)$.

Eulers produktformel gir også

$$\log \zeta(s) = \sum_p \log(1 - p^{-s})^{-1} = \sum_p \sum_{m=1}^\infty \frac{p^{-ms}}{m} = \int_0^\infty x^{-s}\, d\Pi(x)$$

der $d\Pi$ er det diskrete målet på den positive tall-linjen som tar verdien $1/m$ i hvert punkt p^m, og er 0 ellers. Her løper p over alle primtall og m over alle naturlige tall.

Integralet ovenfor kan oppfattes som en Fourier-transform (for funksjoner på den multiplikative gruppen av positive reelle tall, også kjent som en Mellin-transform). Riemann anvender Fourier-inversjon og viser at

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log \zeta(s) \cdot x^s \, \frac{ds}{s}$$

for $a > 1$. Så substituerer han uttrykket for $\log \zeta(s)$, og kommer frem til Riemann–von Mangoldt formelen.

4. Hilbert–Pólya rom

Vi skriver $s = \frac{1}{2} + it$, med s og t komplekse tall. At $\Re(s) = \frac{1}{2}$ er da ekvivalent med at t er reell. Reelle tall opptrer som egenverdier til selv-adjungerte komplekse matriser, eller mer generelt som punkter i spekteret til en selv-adjungert begrenset (= kontinuerlig) operator på et Hilbert-rom. Hilbert og Pólyas ide for å vise Riemann-hypotesen er da denne:

"How to solve it". *Finn et Hilbert-rom $\mathcal{H}$ og en operator $D\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ med spektrum lik de ikke-trivielle nullpunktene til zeta-funksjonen, slik at $i(D - \frac{1}{2})$ er selv-adjungert, eventuelt at $\Delta = D(1 - D)$ er positiv.*

Riemanns zeta-funksjon kan oppfattes som et spesialtilfelle av en mye videre klasse av såkalte *L-funksjoner*. En *L-funksjon* er en kompleks analytisk utvidelse av en Dirichlet-rekke $\sum_{n=1}^\infty a_n/n^s$ som har et Euler-produkt og en funksjonal-likning. Slike kan assosieres til bl.a. tallkropper, algebraiske varieteter over endelige kropper, (elliptiske) modulære former, Maass former, eller mer generelle automorfe former. De to første eksemplene er automorfe former for den algebraiske gruppen $GL(1)$; de to neste for $GL(2)$.

I hvert tilfelle sier den *generaliserte Riemann-hypotesen* at de ikke-trivielle nullpunktene til en slik L-funksjon har en spesifik realdel. Det kan tenkes å være mindre vanskelig å bevise den generaliserte Riemann-hypotesen for alle L-funksjoner i en passende klasse som omfatter $\zeta(s)$, enn å vise den for $\zeta(s)$ alene.

I 1996 annonserte Connes et slikt program for å vise Riemann-hypotesen, som omformer problemet til å etablere en *sporformel* for en såkalt Riemann-strøm (flow) på et adele klasse-rom.

Connes arbeider i den naturlige generaliteten av globale kropper (som er tallkropper, dvs. endelige utvidelser av de rasjonale tall, eller funksjonskropper til algebraiske kurver over endelige kropper). For enkelhets skyld vil vi restriktere oss til tilfellet med kroppen $\mathbb{Q}$ av rasjonale tall, som vil være tilstrekkelig for å diskutere den opprinnelige Riemann-hypotesen. Connes' bruk av Grössencharakterer og Hecke L-funksjoner kan da erstattes med Dirichlet-karakterer og Dirichlet L-funksjoner.

5. Riemann–Weil formelen

Det finnes ulike normer på $\mathbb{Q}$. Den mest kjente er *absoluttverdien* gitt ved

$$|x| = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0, \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Vi kompletterer $\mathbb{Q}$ med hensyn på $|-|$ ved å danne ekvivalensklasser av Cauchy-følger, og får kroppen av reelle tall $\mathbb{R}$. Konstante følger i $\mathbb{Q}$ er Cauchy, og gir en inklusjon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

La p være et primtall. Den *p-adiske normen* på $\mathbb{Q}$ er gitt ved

$$|x|_p = 1/p^n$$

når $x = p^n a/b$ og p ikke deler de hele tallene a og b. Hvis vi i stedet kompletterer $\mathbb{Q}$ med hensyn på normen $|-|_p$ får vi kroppen $\mathbb{Q}_p$ av *p-adiske tall* (Hensel, Hasse). Det er igjen en inklusjon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$. Tillukningen til $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ i $\mathbb{Q}_p$ er ringen $\mathbb{Z}_p = \lim_m \mathbb{Z}/p^m$ av *p-adiske heltall*.

Produktet av alle de nevnte inklusjonene gir en diagonal-inklusjon $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{Q}_p$. Inneholdt i dette uendelige produktet ligger *adele-ringen* $\mathbb{A}$, som er lik det restrikterte produktet

$$\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \prod_p{}' \mathbb{Q}_p$$

med hensyn på underringene $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. Elementene i $\mathbb{A}$ er følger $a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots)$ med $a_\infty \in \mathbb{R}$, $a_p \in \mathbb{Q}_p$ for alle primtall p, slik at $a_p \in \mathbb{Z}_p$ for nesten alle p, dvs. med endelig mange unntak.

Adele-ringen $\mathbb{A}$ er lokalt kompakt, vi har en ring-homomorfi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$ som embedder $\mathbb{Q}$ som et diskret underrom i $\mathbb{A}$, og den additive gruppe-kvotienten $\mathbb{A}/\mathbb{Q}$ er kompakt. (Situasjonen likner altså på inklusjonen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, med kvotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Vi kan snakke om det *adeliske* kontra det *klassiske* tilfellet.)

Enhetene i adele-ringen $\mathbb{A}$ danner en topologisk gruppe $\mathbb{A}^*$, som kalles *idele-gruppen*. De består av følger $j = (a_\infty, a_2, a_3, \dots) \in \mathbb{A}$ med $a_\infty \in \mathbb{R}^*$, $a_p \in \mathbb{Q}_p^*$, og nesten alle $a_p \in \mathbb{Z}_p^*$. Det er en diagonal-inklusjon $\mathbb{Q}^* \subset \mathbb{A}^*$, og den multiplikative gruppe-kvotienten

$$C_\mathbb{Q} = \mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$$

kalles *idele klasse-gruppen*. (I det klassiske tilfellet har vi inklusjonen $\{\pm 1\} = \mathbb{Z}^* \subset \mathbb{R}^*$, med kvotient den multiplikative gruppen $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ av positive reelle tall.)

Produktet av normene $|-|\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+$ og $|-|_p\colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{R}^*_+$ for alle p gir en norm $|-|\colon \mathbb{A}^* \to \mathbb{R}^*_+$. Denne tar $\mathbb{Q}^*$ til 1, fordi hvis $q = \pm p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ er $|q| = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ mens $|q|_{p_i} = 1/p_i^{n_i}$, så

$$|q| \cdot \prod_p |q|_p = 1\,.$$

Dermed faktoriserer $|-|$ gjennom idele klasse-gruppen, og vi får en ekstensjon av grupper

$$1 \to C^1_{\mathbb{Q}} \to C_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{|-|} \mathbb{R}^*_+ \to 1\,.$$

Her er kjernen $C^1_{\mathbb{Q}} = \{g \in C_{\mathbb{Q}} \mid |g| = 1\}$ en kompakt abelsk gruppe.

(Den adeliske teorien for $\mathbb{Q}$ og andre tallkropper i karakteristikk 0 skiller seg her fra teorien for funksjonskropper i karakteristikk p ved at $|-|$ er surjektiv, så en gruppe-virkning av bildet $\mathbb{R}^*_+$ er en 1-parameter-gruppe, dvs. en (Riemann-)strøm. For funksjonskropper er bildet av $|-|$ uendelig syklisk, og generatoren svarer til Frobenius-isomorfien. Da er en gruppe-virkning av bildet i $\mathbb{R}^*_+$ gitt ved en slik diskret automorfi.)

Vi har en kanonisk seksjon $\mathbb{R}^*_+ \to C_{\mathbb{Q}}$ som tar $x \in \mathbb{R}^*_+$ til idele-klassen til $(x, 1, 1, \dots)$, så vi kan skrive

$$C_{\mathbb{Q}} = C^1_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{R}^*_+\,.$$

En kontinuerlig gruppehomomorfi $\chi\colon C^1_{\mathbb{Q}} \to S^1$ kalles en *karakter* på $C^1_{\mathbb{Q}}$. Det er en bijektiv korrespondanse mellom mengden av slike og mengden av *Dirichlet-karakterer* $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ modulo N, for alle naturlige tall N. Til en Dirichlet-karakterer χ kan man tilordne en *Dirichlet L-funksjon*

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}\,.$$

I tilfellet hvor $\chi = 1$ er den trivielle karakteren modulo $N = 1$ er $L(s,1) = \zeta(s)$ lik Riemanns zeta-funksjon.

På hver lokalt kompakt gruppe G finnes det et *Haar mål* $d\mu$ (Weil, 1940), dvs. et ikke-trivielt integrasjons-mål som er invariant under (venstre-)virkningen $L_g\colon x \mapsto gx$, for $g, x \in G$. Haar målet er entydig definert opp til en multiplikativ konstant. For eksempel er Haar målet på $G = \mathbb{R}$ lik Lebesgue-målet $d\mu = dx$, mens Haar målet på $G = \mathbb{R}^*$ er

$$d\mu = d^*x = d\log x = dx/x\,.$$

Spesielt finnes det Haar mål d^*u på de multiplikative gruppene $\mathbb{Q}_p^*$ for alle p, og d^*g på idele klasse-gruppen $C_{\mathbb{Q}}$.

Weil viste i 1952 en generalisering av Riemann–von Mangold formelen, som vi vil kalle *Riemann–Weil formelen*:

$$\hat{h}(0) - \sum_{\chi,\rho} \hat{h}(\rho,\chi) + \hat{h}(1) = \int'_{\mathbb{R}^*} \frac{h(x^{-1})}{|1-x|}\, d^*x + \sum_p \int'_{\mathbb{Q}_p^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|_p}\, d^*u\,.$$

Her løper $\chi\colon C^1_{\mathbb{Q}} \to S^1$ over alle karakter, og ρ over de ikke-trivielle nullpunktene til Dirichlet L-funksjonen $L(s,\chi)$. Videre er h en tilstrekkelig pen test-funksjon på $C_{\mathbb{Q}}$ med $h(1) = 0$, $\hat{h}(s) = \hat{h}(s,1)$ er dens Fourier-transform,

$$\hat{h}(s,\chi) = \int_{C_{\mathbb{Q}}} h(g)\chi(g)|g|^s\, d^*g$$

er den χ-vridde Fourier-transformen til h, og integralene $\int'$ er passelig normaliserte "prinsipal-verdier".

6. Connes' adele klasse-rom

Connes vil så danne et *adele klasse-rom* $X = \mathbb{A}/\mathbb{Q}^*$, som inneholder idele klasse-gruppen $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^* = C_\mathbb{Q}$. Multiplikasjonen $\mathbb{A}^* \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ gir en virkning av $C_\mathbb{Q}$ på X, og Connes studerer $C_\mathbb{Q}$-virkningen på paret $(X, C_\mathbb{Q})$. (Klassisk tilsvarer dette den multiplikative virkningen av $\mathbb{R}^*_+ = (0,\infty)$ på $Y = \mathbb{R}/\mathbb{Z}^* = [0,\infty)$ relativt til underrommet $\mathbb{R}^*/\mathbb{Z}^* = (0,\infty)$. Virkningen har to baner, $\{0\}$ og $(0,\infty)$, og den siste kommer vilkårlig nær den første.)

For å modellere kvotienten X definerer Connes et Hilbert-rom $L^2_\delta(X)$, som vi oppfatter som et rom av funksjoner på X. (Her er $\delta > 1$ en teknisk reell parameter.) La $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ være Bruhat–Schwartz rommet av funksjoner f på $\mathbb{A}$ som er slik at alle mulige deriverte er begrenset og avtar raskt mot null. Da er $L^2_\delta(X)$ gitt ved å komplettere $\mathcal{S}(\mathbb{A})$ med hensyn på en L^2-type pre-norm som ikke skiller mellom f og $q \cdot f$, der $(q \cdot f)(a) = f(q^{-1}a)$ med $f \in \mathcal{S}(\mathbb{A})$, $a \in \mathbb{A}$, $q \in \mathbb{Q}^*$:

$$\|f\|^2_\delta = \int_{C_\mathbb{Q}} \Big| \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} f(qx)\Big|^2 (1 + \log^2|x|)^{\delta/2} |x|\, d^*x \,.$$

(Vi oppfatter faktoren $(1+\log^2|x|)^{\delta/2}$ som en teknisk korreksjonsfaktor. Lokalt er $|x|\, d^*x = dx$, men ikke globalt.) Elementene $g \in C_\mathbb{Q}$ i idele klasse-gruppen virker som operatorer $U(g)\colon L^2_\delta(X) \to L^2_\delta(X)$, gitt ved

$$U(g)(f)(a) = f(j^{-1}a)\,,$$

når g er klassen til en idele $j \in \mathbb{A}^*$.

Tilsvarende er $L^2_\delta(C_\mathbb{Q})$ definert som Hilbert-rommet $\mathcal{S}(C_\mathbb{Q})$ av funksjoner ξ på $C_\mathbb{Q}$, komplettert med hensyn på en passende L^2-norm:

$$\|\xi\|^2_\delta = \int_{C_\mathbb{Q}} |\xi(x)|^2 (1+\log^2|x|)^{\delta/2}\, d^*x \,.$$

Gruppen $C_\mathbb{Q}$ virker på $L^2_\delta(C_\mathbb{Q})$ som en (modulert) regulær representasjon, via operatorene $V(g)\colon L^2_\delta(C_\mathbb{Q}) \to L^2_\delta(C_\mathbb{Q})$ gitt ved

$$V(g)(\xi)(x) = |g|^{1/2}\xi(g^{-1}x)\,.$$

Inklusjonen $C_\mathbb{Q} \subset X$ modelleres nå av en lineær isometri

$$L^2_\delta(X) \xrightarrow{E} L^2_\delta(C_\mathbb{Q})$$

av $C_\mathbb{Q}$-representasjoner, gitt ved

$$E(f)(x) = |x|^{1/2} \sum_{q\in\mathbb{Q}^*} f(qx)\,.$$

Vi har følgende diagram, med vertikale kompletterings-avbildninger:

$$\begin{tikzcd} f \in \mathcal{S}(\mathbb{A}) \arrow[r, "E"] \arrow[d] & \mathcal{S}(C_{\mathbb{Q}}) \ni \xi \arrow[d] \\ L^2_\delta(X) \arrow[r, "E"] & L^2_\delta(C_{\mathbb{Q}}) \end{tikzcd}$$

Vi oppfatter $E\colon L^2_\delta(X) \to L^2_\delta(C_{\mathbb{Q}})$ som et kondensert Euler/deRham-kompleks $d+d^* \colon \Omega^{ev} \to \Omega^{od}$, for den aritmetiske "kurven" Spec($\mathbb{Q}$), med kohomologi $H^{ev} := \ker(E)$ og $H^{od} := \mathrm{cok}(E)$. Kjernen til E er

$$H^{ev} = \mathbb{C}(0) \oplus \mathbb{C}(1)\,,$$

der $C_{\mathbb{Q}}$ virker på $\mathbb{C}(m)$ ved $g \cdot z = |g|^m z$, for $m = 0, 1$. Kokjernen til E er Connes' Hilbert–Pólya rom

$$H^{od} = \mathcal{H}\,.$$

7. Connes' sporformel

La

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^{ev} \arrow[r] \arrow[d, "T(g)"] & \Omega^{ev} \arrow[r, "E"] \arrow[d, "U(g)"] & \Omega^{od} \arrow[r] \arrow[d, "V(g)"] & H^{od} \arrow[r] \arrow[d, "W(g)"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H^{ev} \arrow[r] & \Omega^{ev} \arrow[r, "E"] & \Omega^{od} \arrow[r] & H^{od} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

være virkningene av $g \in C_{\mathbb{Q}}$. For en test-funksjon h på $C_{\mathbb{Q}}$ la

$$W(h) = \int_{C_{\mathbb{Q}}} W(g)h(g)\, d^*g \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

være den h-vektede summen av virkningene $W(g)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, og tilsvarende for $T(h)$, $U(h)$ og $V(h)$.

Operatorene $W(g)$ gir nå en virkning av $C_{\mathbb{Q}}$ på $\mathcal{H}$ som er slik at elementene i $C^1_{\mathbb{Q}}$ virker unitært. Karakterene $\chi\colon C^1_{\mathbb{Q}} \to S^1$ gir derfor en oppsplitting i egenrom (sektorer)

$$\mathcal{H} = \bigoplus_\chi \mathcal{H}_\chi$$

der $\mathcal{H}_\chi = \{\xi \mid W(g)(\xi) = \chi(g)\xi \text{ for alle } g \in C^1_{\mathbb{Q}}\}$. Vi får en virkning $W_\chi(g)\colon \mathcal{H}_\chi \to \mathcal{H}_\chi$ for $g \in C_{\mathbb{Q}}$, som restriktert til $\mathbb{R}^*_+ \subset C_{\mathbb{Q}}$ gir en strøm (flow) på $\mathcal{H}_\chi$. Denne er infinitesimalt generert av en operator $D_\chi\colon \mathcal{H}_\chi \to \mathcal{H}_\chi$, med

$$D_\chi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{W_\chi(e^\epsilon) - 1}{\epsilon}\,.$$

Teorem (Connes, ca. 1996). *La $\delta > 1$. Spekteret til operatoren $D_\chi \colon \mathcal{H}_\chi \to \mathcal{H}_\chi$ er diskret, og består av de* kritiske *nullpunktene til Dirichlet L-funksjonen $L(s,\chi)$, dvs. de med realdel lik $\frac{1}{2}$.*

Det følger at

$$\operatorname{Trace} W(h) = \sum_{\chi,\rho,\Re(\rho)=\frac{1}{2}} \hat{h}(\rho,\chi)$$

der $\chi \colon C^1_{\mathbb{Q}} \to S^1$ løper over alle karakterer, og ρ løper over de kritiske null-punktene til $L(s,\chi)$. Den regulære representasjonen er sporløs:

$$\operatorname{Trace} V(h) = 0\,,$$

mens sporet for virkningen på $\ker(E) = \mathbb{C}(0) \oplus \mathbb{C}(1)$ er

$$\operatorname{Trace} T(h) = \hat{h}(0) + \hat{h}(1)\,.$$

Connes reduserer Riemann-hypotesen til følgende antagelse:

Formodning (Connes, 1996).

$$\operatorname{Trace} U(h) = \int'_{\mathbb{R}^*} \frac{h(x^{-1})}{|1-x|}\, d^*x + \sum_p \int'_{\mathbb{Q}_p^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|_p}\, d^*u\,.$$

Dette vil følge hvis Guillemins sporformel, som gjelder for virkninger av abelske Lie-grupper på glatte kompakte mangfoldigheter, også gjelder for virkningen av den abelske topologiske gruppen $C_{\mathbb{Q}}$ på Hilbert-rommet $L^2_\delta(X)$ til det singulære rommet X. Connes' beviser at denne sporformelen holder S-lokalt ved en endelig mengde primtall S. Formodningen er at den også gjelder for S lik den uendelige mengden av alle primtall.

I så fall vil

$$\begin{aligned}\hat{h}(0) - \sum_{\chi,\rho,\Re(\rho)=\frac{1}{2}} \hat{h}(\rho,\chi) + \hat{h}(1) &= \operatorname{Trace} T(h) - \operatorname{Trace} W(h) \\ &= \operatorname{Trace} U(h) - \operatorname{Trace} V(h) = \operatorname{Trace} U(h)\end{aligned}$$

være lik den lokale delen av Riemann–Weil formelen:

$$\int'_{\mathbb{R}^*} \frac{h(x^{-1})}{|1-x|}\, d^*x + \sum_p \int'_{\mathbb{Q}_p^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|_p}\, d^*u = \hat{h}(0) - \sum_{\chi,\rho} \hat{h}(\rho,\chi) + \hat{h}(1)\,.$$

Dersom formodningen holder er altså

$$\sum_{\chi,\rho,\Re(\rho)\neq\frac{1}{2}} \hat{h}(\rho,\chi) = 0$$

for alle test-funksjoner h, som betyr at for hver χ finnes det ingen ikke-trivielle nullpunkter ρ til $L(s,\chi)$ utenom den kritiske linjen. Spesielt gjelder dette for $\zeta(s) = L(s,1)$, som bekrefter Riemann-hypotesen.

Kilder

E. Bombieri, *Problems of the Millennium: the Riemann Hypothesis*, 1–12.

D. Bump, *Automorphic Forms and Representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 55, Cambridge University Press, 1997.

A. Connes, *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (NS) **5** (1999), 29–106.

———, *Noncommutative geometry and the Riemann zeta function*, Mathematics: frontiers and perspectives (Arnold, V. et al., eds.), American Mathematical Society, 2000, pp. 35–54.

H.M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, 1974.

H. Iwaniec and P. Sarnak, *Perspectives on the analytic theory of L-functions*, GAFA 2000. Visions in mathematics–Towards 2000 (Proceedings of a meeting, Tel Aviv, Israel, August 25-September 3, 1999. Part II) (Alon, N. et al., eds.), Birkhäuser, 2000, pp. 705–741.

A.N. Parshin and I.R. Shafarevich, *Number Theory I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49, Springer Verlag, 1995.

B. Riemann, *Gesammelte Mathematische Werke*, Leipzig, 1892, pp. 145–153.

P. Sarnak, *L-functions*, Doc. Math., J. DMV, Extra Vol. ICM Berlin 1998, vol. I, 1998, pp. 453–465.

A. Weil, *Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers*, Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz (1952), 252–265.

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo
E-mail address: `rognes@math.uio.no`