JEAN-PIERRE SERRE : ALGEBRAISK TOPOLOGI

John Rognes

25. april 2003

Jean-Pierre Serre ble født den 15. september 1926 i Bages, øst i Pyreneene. Han var student ved Ecole Normale Supérieure 1945–48, og mottok sin Docteur és sciences fra Paris IV – Sorbonne i 1951, veiledet av Henri Cartan. De fleste av hans matematiske arbeider i de tidlige årene 1949–53 ligger innen området algebraisk topologi, mens han i de neste årene vendte seg mer mot analytisk geometri, algebraisk geometri og aritmetikk. Med Serres bidrag utviklet algebraisk topologi seg til et emne der det ble mulig å gjennomføre dype, betydningsfulle beregninger. Han introduserte spektralsekvenser som et effektivt verktøy i dette emnet, hvor de fortsatt er det foretrukne redskap for å finne korrespondanser og relasjoner ut over de som utledes på mer formelt vis.

I algebraisk topologi studeres spørsmål om topologiske rom ved å relatere dem til tilsvarende spørsmål om algebraiske objekter, så som grupper og ringer. Vi begynner med et eksempel på et slikt topologisk spørsmål, og skal så se på hvilke algebraiske invarianter som kan brukes for å redusere disse til algebraiske spørsmål. Vi skal se at en av disse, homologi, er essensielt beregnbart, mens en annen, homotopi, var mye mindre effektivt tilgjengelig før Serres arbeider. Så skal vi se på Serres spektralsekvens og hvilke nye resultater han kunne utlede ved hjelp av den. Til sist vil vi si litt om hvordan algebraisk topologi (og deretter geometrisk topologi og algebraisk K-teori) videreutviklet seg i de følgende årene.

Vektorfelter på sfærer.

Den $(n-1)$-dimensjonale *sfæren*

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

er en differensiabel mangfoldighet. Tangentrommet $T_x S^{n-1}$ i et punkt $x \in S^{n-1}$ er lik hyperplanet i $\mathbb{R}^n$ som står ortogonalt på x. Et velkjent spørsmål er om det finnes et kontinuerlig vektorfelt

$$v \colon x \mapsto v(x) \in T_x S^{n-1}$$

definert for alle $x \in S^{n-1}$, som er uten nullpunkter, dvs. slik at $v(x) \neq 0$ for hver $x \in S^{n-1}$. Et mer nyansert spørsmål er hva som er det maksimale antallet lineært uavhengige vektorfelter $v_1, \dots, v_{k-1}$ på S^{n-1}, dvs. slik at $v_1(x), \dots, v_{k-1}(x)$ er lineært uavhengige i $T_x S^{n-1}$ for hver $x \in S^{n-1}$. (Grunnen til at vi skriver $(k-1)$ i stedet for k vektorfelter blir klarere senere.)

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Vi kan alltid normere et nullpunkt-fritt vektorfelt til et enhetsvektorfelt, og mer generelt kan vi ved Gram–Schmidt prosessen alltid erstatte et antall lineært uavhengige vektorfelter med like mange punktvis ortonormale vektorfelter. Heretter forutsetter vi at det er gjort.

For partall $n = 2m$ har den odde sfæren S^{2m-1} et enhetsvektorfelt v med

$$v(x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}) = (-x_2, x_1, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1}) .$$

Da er x og $v(x)$ ortogonale for hver x, så $v(x) \in T_x S^{2m-1}$. Hvis vi identifiserer $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ så er dette vektorfeltet gitt ved $v(x) = ix$.

For oddetall $n = 2m + 1$ har den jevne sfæren S^{2m} ikke noe enhetsvektorfelt.

For $n = 4$ tillater $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ tre ortonormale vektorfelter v_1, v_2 og v_3. Hvis vi identifiserer $\mathbb{R}^4$ med Hamilton-kvaternionene $\mathbb{H}$ så kan de gis som $v_1(x) = ix$, $v_2(x) = jx$ og $v_3(x) = kx$.

For $n = 6$ tillater S^5 ett enhetsvektorfelt, men ikke to ortonormale vektorfelter. Det finnes altså ingen 6-dimensjonal reell divisjonsalgebra med tilsvarende egenskaper som $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, eller Cayley oktonionene $\mathbb{O}$, som har reell dimensjon 2, 4 og 8.

For $n = 16$ tillater S^{15} syv ortogonale enhetsvektorfelter, men ikke flere. Det finnes altså heller ingen 16-dimensjonal reell divisjonsalgebra.

Seksjoner i en fiberbunt.

Generelt kan problemet beskrives som et *løftningsproblem*, som følger. La

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}$$

være den ortogonale gruppen, og la

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \{(u_1, \dots, u_k) \mid u_i \cdot u_j = \delta_{ij}\}$$

være Stiefel-mangfoldigheten av k-tupler av ortonormale vektorer i $\mathbb{R}^n$. Avbildningen $O(n) \to V_k(\mathbb{R}^n)$ som tar en ortogonal matrise A til dens k første søylevektorer definerer en homeomorfi

$$V_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k) .$$

Her identifiseres $O(n-k)$ med undergruppen av ortogonale matriser i $O(n)$ på formen $\left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.

Vi kan tenke på et element $(u_1, \dots, u_k)$ i $V_k(\mathbb{R}^n)$ som et punkt $x = u_1 \in S^{n-1}$ på $(n-1)$-sfæren, sammen med $(k-1)$ ortonormale vektorer $u_2, \dots, u_k$ i tangentrommet $T_x S^{n-1}$.

I tilfellet $k = 1$ er $V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$. Inklusjonen $O(n-k) \subset O(n-1)$ induserer en surjektiv avbildning

$$p \colon V_k(\mathbb{R}^n) \cong O(n)/O(n-k) \to O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$$

som tar $(u_1, \dots, u_k)$ til den første enhetsvektoren u_1. Denne *projeksjonen*

$$p \colon V_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}$$

utgjør en såkalt *fiberbunt*. Fibrene til p, dvs. invers-bildene $p^{-1}(x)$ av de enkelte punktene $x \in S^{n-1}$ er alle homeomorfe med $O(n-1)/O(n-k) \cong V_{k-1}(\mathbb{R}^{n-1})$. Lokalt, over små omegner i basisrommet S^{n-1} ser totalrommet $V_k(\mathbb{R}^n)$ ut som et produkt av denne omegnen og en fiber, men denne produkt-dekomposisjonen lar seg generelt ikke globalisere til å gjelde over hele S^{n-1}.

For eksempel, med $k = 2$ er $V_2(\mathbb{R}^n)$ lik rommet av ortonormale par (u_1, u_2), som vi kan oppfatte som par (x, v), der $x \in S^{n-1}$ er et punkt og $v \in T_x S^{n-1}$ er en enhetsvektor. Så $V_2(\mathbb{R}^n)$ er rommet av enhetsvektorer i tangentbunten til S^{n-1}. Projeksjonen $p\colon V_2(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}$ husker punktet x og glemmer tangentvektoren v. Fiberen $p^{-1}(x)$ består av enhetssfæren i $T_x S^{n-1}$, som er en $(n-2)$-sfære.

Vi har nå en alternativ beskrivelse av et $(k-1)$-tuppel $v_1, \dots, v_{k-1}$ av ortonormale vektorfelter på S^{n-1}, nemlig som en *seksjon* $s\colon S^{n-1} \to V_k(\mathbb{R}^n)$ til projeksjonen p, dvs. en avbildning s slik at $p \circ s$ er identiteten på S^{n-1}:

$$S^{n-1} \xrightarrow{s} V_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{p} S^{n-1}\,.$$

For en slik seksjon s tilordner til hvert punkt $x \in S^{n-1}$ et punkt $s(x) = (u_1, \dots, u_k)$ i $V_k(\mathbb{R}^n)$ slik at $p(u_1, \dots, u_k) = (p \circ s)(x) = x$, dvs. at $u_1 = x$. Så $u_2, \dots, u_k$ er $(k-1)$ ortonormale vektorer i $T_x S^{n-1}$. Når x varierer gir dette ikke noe annet enn $(k-1)$ innbyrdes ortonormale vektorfelter på S^{n-1}.

Gitt $k \le n$ står vi derfor overfor spørsmålet: finnes det noen seksjon $s\colon S^{n-1} \to V_k(\mathbb{R}^n)$ til projeksjonen $p\colon V_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}$?

Fra topologi til algebra.

Verktøyene i algebraisk topologi er visse konstruksjoner, kalt *funktorer*, som transformerer topologi til algebra. To viktige eksempler på slike funktorer er:

(a) *homologi*, som til et topologisk rom X tilordner en sekvens av abelske grupper $H_k(X)$ for $k = 0, 1, 2, \dots$, gjerne oppfattet som en gradert abelsk gruppe $H_*(X)$, kalt *homologi-gruppene* til X. Til hver kontinuerlig avbildning $f\colon X \to Y$ tilordnes gruppehomomorfier $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ for alle k.

(b) *homotopi*, som til et topologisk rom X med et valgt basispunkt $x_0 \in X$ tilordner en sekvens $\pi_k(X)$ for $k = 0, 1, 2, \dots$, slik at

(1) $\pi_0(X)$ er en mengde (vei-sammenhengskomponentene til X),
(2) $\pi_1(X)$ er en (ikke-kommutativ) gruppe (fundamental-gruppen til X), og
(3) $\pi_k(X)$ er en abelsk gruppe for hver $k \ge 2$.

Igjen oppfattes disse gjerne som et samlet objekt $\pi_*(X)$, kalt *homotopi-gruppene* til X. Til hver kontinuerlig avbildning $f\colon X \to Y$ som er basispunkt-bevarende, dvs. med $f(x_0) = y_0$, så tilordnes funksjoner $f_*\colon \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ for alle k, som er gruppehomomorfier for $k \ge 1$.

De Rham-kohomologi.

Vi vil illustrere homologi-begrepet ved hjelp av et dualt kohomologi-begrep, som kan forklares ved klassisk kalkulus i flere variable.

La $X \subset \mathbb{R}^n$ være et åpent underrom, og la $x = (x_1, \dots, x_n)$ være koordinater i $\mathbb{R}^n$. La $\Omega^k(X)$ være det reelle vektorrommet av *glatte k-former* på X, dvs. summer på formen

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} a_{i_1, \dots, i_k}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

der hver $a_{i_1,\dots,i_k}$ er en glatt funksjon på $\mathbb{R}$. Spesielt er $\Omega^0(X) = C^\infty(X)$ lik rommet av glatte funksjoner $f\colon X \to \mathbb{R}$. Differensialet av en k-form ω er en $(k+1)$-form $d\omega$, så det er et diagram

$$0 \to \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{n-1}(X) \xrightarrow{d} \Omega^n(X) \to 0\,.$$

For hver k er bildet $\mathrm{im}(d)$ av $d\colon \Omega^{k-1}(X) \to \Omega^k(X)$ inneholdt i kjernen $\ker(d)$ til $d\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$, eller ekvivalent, $d \circ d = 0$. Diagrammet ovenfor er derfor et *kokompleks*. Homologisk algebra handler da om *kohomologi-gruppene* til slike kokomplekser, som måler forskjellen på $\ker(d)$ og $\mathrm{im}(d)$ hvert sted i diagrammet. For hver k er den k-te *de Rham-kohomologigruppen* til X definert lik

$$H^k_{dR}(X) = \frac{\ker(d)}{\mathrm{im}(d)} = \frac{\ker(d\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X))}{\mathrm{im}(d\colon \Omega^{k-1}(X) \to \Omega^k(X))}\,.$$

For hver k er $H^k_{dR}(X)$ et reelt vektorrom, som måler forskjellen mellom de *lukkede* k-formene $\ker(d)$ og de *eksakte* k-formene $\mathrm{im}(d)$ i $\Omega^k(X)$. Det geometrisk interessante er at denne forskjellen sier noe om formen eller topologien til rommet X, i sær slik den relaterer til k-dimensjonale fenomener.

Vi kan illustrere dette litt nærmere i det klassiske tilfellet $n = 3$, med $X \subset \mathbb{R}^3$, koordinater $x = (x_1, x_2, x_3)$ og de Rham-kokomplekset

$$0 \to \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \Omega^2(X) \xrightarrow{d} \Omega^3(X) \to 0\,.$$

For eksempel er differensialet til en 0-form f lik

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,dx_3\,.$$

Vi kan identifisere 1-formene i $\Omega^1(X)$ med vektorfelter på X ved å la $a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3$ svare til vektorfeltet (a_1, a_2, a_3). Da svarer df til vektorfeltet

$$v = \mathrm{grad}(f) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3})\,.$$

For $\nu = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + a_3\,dx_3$ er

$$d\nu = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2\,.$$

Videre identifiserer vi 2-formene i $\Omega^2(X)$ med vektorfelter på X ved å la

$$b_1\,dx_2 \wedge dx_3 + b_2\,dx_3 \wedge dx_1 + b_3\,dx_1 \wedge dx_2$$

svare til vektorfeltet (b_1, b_2, b_3). Dersom vektorfeltet $v = (a_1, a_2, a_3)$ svarer til 1-formen ν som ovenfor, så svarer 2-formen $d\nu$ til vektorfeltet

$$w = \mathrm{curl}(v) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\,.$$

For $\omega = b_1\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3\, dx_1 \wedge dx_2$ er

$$d\omega = \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,.$$

Til sist identifiserer vi 3-formene i $\Omega^3(X)$ med funksjoner på X, ved å la

$$c\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

svare til funksjonen c. Dersom vektorfeltet $w = (b_1, b_2, b_3)$ svarer til 2-formen ω som ovenfor, så svarer 3-formen $d\omega$ til funksjonen

$$c = \mathrm{div}(w) = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3}\,.$$

Vi har dermed identifisert de Rham-kokomplekset ovenfor med kokomplekset

$$0 \to C^\infty(X) \xrightarrow{\mathrm{grad}} \Gamma(TX) \xrightarrow{\mathrm{curl}} \Gamma(TX) \xrightarrow{\mathrm{div}} C^\infty(X) \to 0$$

der $\Gamma(TX)$ er lik rommet av glatte vektorfelter på X. (Notasjonen henspeiler på at disse ikke er noe annet enn seksjoner i tangentbunten $p\colon TX \to X$.) Betingelsene $\mathrm{im}(d) \subset \ker(d) \subset \Omega^k(X)$ for $k = 1$ og 2 svarer til at

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}(f)) = 0 \quad \text{og} \quad \mathrm{div}(\mathrm{curl}(v)) = 0$$

for hver $f \in C^\infty(X)$ og $v \in \Gamma(TX)$. Vi har altså at $\mathrm{im}(\mathrm{grad}) \subset \ker(\mathrm{curl})$ og $\mathrm{im}(\mathrm{curl}) \subset \ker(\mathrm{div})$.

Dersom X er et konvekst underrom av $\mathbb{R}^3$, eller mer generelt, et kontraktibelt underrom, så gjelder også de omvendte inklusjonene, dvs. $\mathrm{im}(\mathrm{grad}) = \ker(\mathrm{curl})$ og $\mathrm{im}(\mathrm{curl}) = \ker(\mathrm{div})$. Men generelt er dette ikke tilfellet, som de følgende to eksemplene illustrerer.

Eksempel 1. La først $X = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ være komplementet til x_3-aksen, og la vektorfeltet $v \in \Gamma(TX)$ være gitt ved

$$v(x) = \frac{(-x_2, x_1, 0)}{(x_1^2 + x_2^2)}\,.$$

Da er $\mathrm{curl}(v) = 0$, men det finnes ingen glatt funksjon $f\colon X \to \mathbb{R}$ med $\mathrm{grad}(f) = v$, ved Stokes' teorem anvendt på $\int_{S^1} v$, der $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset X$ er en sirkel som løper en gang rundt x_3-aksen. Den tilsvarende 1-formen ν har $d\nu = 0$, men det finnes ingen 0-form f med $df = \nu$. Vi sier at ν er lukket, eller en *kosykel*, med ν er ikke eksakt, eller en *korand*.

I dette tilfellet er den første de Rham-kohomologigruppen til X lik

$$H^1_{dR}(X) \cong \frac{\ker(\mathrm{curl})}{\mathrm{im}(\mathrm{grad})}$$

og er isomorf med $\mathbb{R}$. Det curl-frie vektorfeltet v representerer en generator for dette 1-dimensjonale vektorrommet. Siden $\ker(\mathrm{curl}) = \mathrm{im}(\mathrm{grad})$ for X konveks eller kontraktibel, så måler denne kvotienten i en forstand hvor langt X er fra å være konveks eller kontraktibel. Det er eksistensen av en lukket kurve i X (en sirkel om x_3-aksen) som ikke er randen til en kompakt flate inneholdt i X som måles i dette tilfellet, så $H^1_{dR}(X)$ oppfatter slike hull som kan omsluttes av 1-dimensjonale *sykler* i X. Dette rommet X er ikke enkelt-sammenhengende. De høyere de Rham-kohomologigruppene $H^k_{dR}(X)$ for $k = 2, 3$ er i dette tilfellet trivielle, som antyder at X ikke har noen 2- eller 3-dimensjonale hull.

Eksempel 2. Som et annet eksempel, la $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ være rommet utenom origo, og la vektorfeltet $w \in \Gamma(TX)$ være gitt ved

$$w(x) = \frac{x}{|x|^3} = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}\,.$$

Da er $\operatorname{div}(w) = 0$, men det finnes ikke noe vektorfelt v på X med $\operatorname{curl}(v) = w$, ved Stokes' teorem anvendt på $\int_{S^2} w$, der $S^2 \subset X$ er en sfære som omslutter origo. Den tilsvarende 2-formen ω har $d\omega = 0$, men det finnes ingen 1-form ν med $d\nu = \omega$. Igjen sier vi at ω er lukket, eller en kosykel, men ω er ikke eksakt, eller en korand.

I dette tilfellet er den andre de Rham-kohomologigruppen til X lik

$$H^2_{dR}(X) \cong \frac{\ker(\operatorname{div})}{\operatorname{im}(\operatorname{curl})}$$

og er isomorf med $\mathbb{R}$, og det divergensfrie vektorfeltet w representerer en generator for dette 1-dimensjonale vektorrommet. Siden $\ker(\operatorname{div}) = \operatorname{im}(\operatorname{curl})$ for X konveks eller kontraktibel, så måler denne kvotienten i en forstand hvor langt X er fra å være konveks eller kontraktibel. Det er eksistensen av en lukket flate i X (en sfære om origo) som ikke er randen til et kompakt legeme inneholdt i X som måles i dette tilfellet, så $H^2_{dR}(X)$ oppfatter slike hull som kan omsluttes av 2-dimensjonale sykler i X. De øvrige de Rham-kohomologigruppene $H^k_{dR}(X)$ for $k = 1, 3$ er i dette tilfellet trivielle, som nå passer med at X ikke har noen 1- eller 3-dimensjonale hull. Dette rommet er jo enkelt-sammenhengende.

Singulær homologi.

De Rham-kohomologi kan tilsvarende defineres for enhver *glatt mangfoldighet* X. En annen vid klasse av topologiske rom er *polyedre*, eller *simplisial-komplekser*, som er bygget opp ved å lime sammen punkter, linjestykker, triangler, tetraedre og høyere-dimensjonale *simplekser*. Det er kjent at hver glatt mangfoldighet kan trianguleres, dvs. realiseres som et polyeder. Omvendt kan hvert endelig polyeder embeddes i et Euklidisk rom, slik at en tilstrekkelig liten ϵ-omegn om polyederet er en kompakt mangfoldighet (med rand) som er homotopi-ekvivalent med polyederet.

Kohomologi er i en viss forstand dual til en annen teori som kalles *homologi*.

Allerede Henri Poincaré (ca. 1890) hadde tilgjengelig et homologi-begrep for simplisial-komplekser, men dette begrepet ble stadig utviklet i begynnelsen av det 20. århundre. Til å begynne med tenkte man på homologi gjennom rangen til homologi-gruppene, dvs. de såkalte *Betti-tallene*, men Emmy Noether viste på 1930-tallet (eller før ?) at homologi heller burde oppfattes som abelske grupper. Det var først i 1940 at Samuel Eilenberg ga den moderne definisjonen av singulær homologi, som er definert for et hvert topologisk rom X. Denne avhenger av en abelsk koeffisient-gruppe π, og tilordner til et hvert rom X en sekvens av abelske grupper $H_k(X; \pi)$ for $k = 0, 1, 2, \dots$, kalt (de singulære) homologi-gruppene med koeffisienter i π. Det mest grunnleggende tilfellet er $\pi = \mathbb{Z}$, de hele tall, og vi skriver ofte kort $H_k(X)$ for $H_k(X; \mathbb{Z})$. Georges de Rham viste at for X en glatt mangfoldighet er det en naturlig isomorfi

$$H^k_{dR}(X) \cong \operatorname{Hom}(H_k(X), \mathbb{R})\,.$$

Her betyr $\operatorname{Hom}(-,-)$ gruppen av gruppe-homomorfier mellom de gitte abelske gruppene.

Et viktig aspekt ved homologi-gruppene er at de langt på vei er en *beregnbar* invariant av et topologisk rom. I hvert fall er dette tilfellet for rom som er bygget opp av simplekser, dvs. simplisial-komplekser, eller mer generelt for rom som er bygget opp ved induktivt å feste celler som enhets-disken $D^n \subset \mathbb{R}^n$ langs med randen $S^{n-1} \subset D^n$ til det som tidligere er konstruert. Ett byggetrinn går da fra et rom X' til et større rom $X'' = X' \cup_\varphi D^n$ der $\varphi\colon S^{n-1} \to X'$ forteller hvordan randen til D^n limes fast på det foregående stadiet X'. Rom X som kan bygges opp på denne måten kalles *celle-komplekser*. Da er $X' \subset X'' \subset X$. For et simplisial-kompleks, eller mer generelt et celle-kompleks, er det en rent algebraisk oppgave å bestemme homologi-gruppene fra beskrivelsen av hvordan rommet er bygget opp.

Det enkleste ikke-trivielle eksempelet begynner med en 0-celle, dvs. et punkt $X' = *$, og føyer så til en n-celle D^n ved å identifisere randen S^{n-1} med punktet $*$. Det er bare en måte å gjøre dette på, siden det bare er en avbildning $\varphi\colon S^{n-1} \to *$, og resultatet er kvotientrommet $X'' = * \cup_\varphi D^n = D^n/S^{n-1}$, som er homeomorft med n-sfæren S^n. Dette gir en celle-struktur på $X = S^n$ med én 0-celle og én n-celle.

De singulære homologi-gruppene $H_k(S^n)$ til S^n kan beregnes fra et kompleks på formen

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \ldots$$

der de to ikke-trivielle gruppene sitter i gradene $k = 0$ og $k = n$. Det følger lett at

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{for } k = 0 \text{ eller } k = n, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Et program (for å konstruere avbildninger).

Mange geometriske eller topologiske spørsmål kan reduseres til problemet å konstruere en kontinuerlig avbildning $f\colon X \to Y$ mellom to gitte rom X og Y, slik at f har visse ønskede egenskaper. For eksempel er spørsmålet om det finnes $(k-1)$ lineært uavhengige vektorfelter på S^{n-1} ekvivalent med problemet om det kan konstrueres en seksjon $s\colon S^{n-1} \to V_k(\mathbb{R}^n)$ til fiberbunt-projeksjonen $p\colon V_k(\mathbb{R}^n) \to S^{n-1}$.

Vanligvis er det gitt hvordan X og Y er konstruert som simplisielle komplekser eller celle-komplekser, slik at homologi-gruppene $H_*(X)$ og $H_*(Y)$ er kjent. For å konstruere en avbildning $f\colon X \to Y$ kan man så forsøke å gå induktivt frem, ved først å følge oppskriften for hvordan X er bygget opp ved å lime på celler. For hver celle som inngår i X antar man induktivt at f er blitt konstruert som en avbildning f' fra det underrommet X' som allerede er bygget opp av X, til Y, og så er problemet å utvide f over den nye cellen D^n, kompatibelt med den gitte oppførselen på randen S^{n-1}. Dersom dette lar seg gjøre er så f konstruert som en avbildning f'' fra $X'' = X' \cup_\varphi D^n$, osv.

(a) Når det gjelder X, så inneholder homologien $H_*(X)$ tilstrekkelig informasjon om hvordan X er bygget opp for et slikt program.

Problemet ligger på den andre siden, i rommet Y som vi avbilder til. For eksempel vil en gitt avbildning $f'\colon X' \to Y$ gi en avbildning $f' \circ \varphi\colon S^{n-1} \to Y$, og f' kan utvides til en avbildning $f''\colon X'' = X' \cup_\varphi D^n \to Y$ hvis og bare hvis denne sammensetningen $f' \circ \varphi\colon S^{n-1} \to Y$ kan utvides til hele D^n. Dette er et spørsmål om hvordan avbildningen $f' \circ \varphi$ fra sfæren S^{n-1} spiller sammen med topologien til rommet Y, og som egentlig besvares av *homotopi-gruppene* til Y, heller enn homologi-gruppene til Y. Vi skal snart komme tilbake til definisjonen av disse andre gruppene assosiert til et topologisk rom, men vil først bare presisere:

(b) Når det gjelder Y så er det homotopi-gruppene $\pi_*(Y)$ som inneholder den kritiske informasjonen for det skisserte programmet som skal konstruere $f: X \to Y$.

Selv om vi forutsetter at vi kjenner celle-strukturen til Y, så er dette bare i en begrenset grad tilstrekkelig til å redusere spørsmål om homotopi-gruppene til hele Y til potensielt enklere spørsmål om hver enkelt celle i Y. En avbildning fra S^{n-1} eller D^n til Y kan løpe frem og tilbake over et stort antall ulike celler i Y, og det er generelt ikke nok å studere slike avbildninger ved å analysere hva som skjer med hver enkelt celle i Y for seg. Likevel er det konstruktivt å undersøke på hvilke måter en celle i X, si D^k, kan avbildes til en celle i Y, si D^n, under gitte randbetingelser. I det enkleste tilfellet, der $X = * \cup D^k = S^k$ og $Y = * \cup D^n = S^n$ er gitt ved å kollapse randen til henholdsvis en k-celle og en n-celle til et punkt, så handler denne analysen om hvilke avbildninger $S^k \to S^n$ som finnes, og vi skal snart se at dette er det fundamentale homotopi-teoretiske spørsmålet om å bestemme homotopi-gruppene til sfærene.

Men frem til Serres doktor-avhandling (1951) var det meget begrenset hva man visste om hvordan homotopi-gruppene til et rom skulle beregnes. Etter Serre har vi i hvert fall uendelig mye informasjon om slike beregninger. Men fortsatt finnes det ikke ett eneste eksempel på et enkelt-sammenhengende celle-kompleks med endelig mange celler der alle homotopi-gruppene er kjent (unntatt hvis rommet er kontraktibelt og alle gruppene er trivielle).

Fundamental-gruppen.

La X være et topologisk rom, med et fast valgt *basispunkt* $x_0 \in X$. En *løkke* γ i X er en vei i X som begynner og slutter i x_0, dvs. en kontinuerlig avbildning $\gamma: I \to X$ der $I = [0,1]$ er enhetsintervallet, med $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$.

To løkker α og β i X er *homotope* dersom det finnes en kontinuerlig familie av løkker $t \mapsto \gamma_t$ i X, for $t \in I$, slik at $\alpha = \gamma_0$ og $\beta = \gamma_1$. Homotopi definerer en ekvivalensrelasjon $\simeq$ på mengden av løkker i X, og vi skriver $[\alpha] = \{\beta \mid \alpha \simeq \beta\}$ for ekvivalensklassen til en løkke α. *Fundamentalgruppen* $\pi_1(X)$ til X er definert som mengden av ekvivalensklasser av løkker i X:

$$\pi_1(X) = \{\gamma \text{ en løkke i } X\}/\simeq$$

Gruppestrukturen er gitt ved sammensetning av løkker: $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$ der $\alpha * \beta: I \to X$ først løper gjennom α, så gjennom β.

Et (vei-sammenhengende) rom X er enkelt-sammenhengende hvis og bare hvis $\pi_1(X)$ er triviell. Fundamentalgruppen var kjent allerede av Poincaré (?).

Fundamentalgruppen er generelt ikke kommutativ. F.eks., hvis $A, B, C \subset \mathbb{R}^3$ er de tre Borromeiske ringer og $X = \mathbb{R}^3 \setminus (A \cup B)$ er komplementet til de to første ringene, så finnes det løkker α og β i X som går en gang rundt henholdsvis A og B, slik at

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle [\alpha], [\beta] \rangle$$

er en fri gruppe på to generatorer. Den resterende ringen C kan oppfattes som en løkke γ i X, og representerer da kommutatoren

$$[\gamma] = [\alpha] \cdot [\beta] \cdot [\alpha]^{-1} \cdot [\beta]^{-1}.$$

Siden $[\gamma]$ er ikke-triviell i $\pi_1(X)$ kan C ikke trekkes fri fra A og B, dvs. de tre ringene er virkelig lenket.

En sentral konstruksjon i Serres doktoravhandling er *løkkerommet*

$$\Omega X = \{\gamma \text{ en løkke i } X\}$$

som består av alle løkkene i X, med en passende topologi. To punkter $\alpha, \beta \in \Omega X$ er i samme vei-sammenhengskomponent hvis og bare hvis de kan forbindes med en vei $t \mapsto \gamma_t$, $t \in I$, som er det samme som at $\alpha \simeq \beta$. Fundamentalgruppen $\pi_1(X)$ er derfor lik mengden $\pi_0(\Omega X)$ av vei-sammenhengskomponenter til løkkerommet ΩX:

$$\pi_1(X) = \pi_0(\Omega X)\,.$$

Høyere homotopi-grupper.

Witold Hurewicz (før 1935) og Eduard Čech (1932) definerte en følge av *høyere homotopigrupper* $\pi_k(X)$ for $k = 0, 1, 2, \dots$. De kan gis ved å iterere løkkeromskonstruksjonen, slik at

$$\pi_k(X) = \pi_{k-1}(\Omega X) = \cdots = \pi_1(\Omega^{k-1} X) = \pi_0(\Omega^k X)\,.$$

Alternativt kan vi identifisere det k-foldig itererte løkkerommet $\Omega^k X$ til X med rommet av avbildninger $\gamma\colon I^k \to X$, der I^k er en k-dimensjonal kube, slik at γ tar hele randen $\partial I^k \subset I^k$ til basispunktet $x_0 \in X$. Da er $\pi_k(X) = \pi_0(\Omega^k X)$ lik homotopi-klassene av slike avbildninger $\gamma\colon I^k \to X$ som tar ∂I^k til $*$.

Hvis vi identifiserer $I^k/\partial I^k \cong S^k$, så er

$$\pi_k(X) \cong [S^k, X]$$

der parentesene betyr homotopi-klasser av (basispunkt-bevarende) avbildninger $\gamma\colon S^k \to X$.

Det viser seg at de høyere homotopi-gruppene $\pi_k(X)$ for $k \geq 2$ alle er abelske grupper. Dette ble først oppfattet som en svakhet, siden den ikke-kommutative fundamental-gruppen inneholder mer informasjon enn den tilsvarende kommutative homologi-gruppen $H_1(X)$. Men denne skepsisen har vist seg ubegrunnet. Homotopi-gruppene presenterer annen informasjon om rommet X enn homologigruppene.

Hurewicz viste (1935–36) at for X et enkelt-sammenhengende rom med $\pi_i(X) = 0$ for alle $i < k$, så er det en naturlig isomorfi

$$\pi_k(X) \cong H_k(X)$$

der $H_k(X)$ er den k-te *homologi-gruppen* til X. Kohomologi-gruppene til X er i en viss forstand duale til disse homologi-gruppene. Under hypotesen i Hurewicz' teorem er det naturlige isomorfier

$$H^k(X;\pi) \cong \mathrm{Hom}(H_k(X), \pi) \cong \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$$

der $\pi = \pi_k(X)$.

For eksempel følger det for $X = S^n$ at

$$\pi_k(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{for } k < n, \\ \mathbb{Z} & \text{for } k = n. \end{cases}$$

I tilfellet $k = n$ er isomorfien $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ gitt ved *graden* til en (glatt) avbildning $\gamma\colon S^n \to S^n$, dvs. antallet punkter i et inversbilde $\gamma^{-1}(x)$ for et generisk punkt $x \in S^n$. Men Hurewicz' teorem sier ikke noe om $\pi_k(S^n)$ for $k > n$.

Homotopi-grupper av sfærer.

De første eksempelene på at de høyere homotopi-gruppene er forskjellige fra (ko-)homologi-gruppene ble funnet av Heinz Hopf, i 1931. Det er en fiberbunt

$$\eta \colon S^3 \to S^2$$

som tar et punkt $(z_1, z_2) \in S^3 \subset \mathbb{C}^2$ til punktet med homogene koordinater $[z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^1 \cong S^2$. *Fibrene* til η, dvs. inversbildene $\eta^{-1}(x)$ av de enkelte punktene $x \in S^2$ er sirkler på formen $(\lambda z_1, \lambda z_2) \in S^3$, der λ gjennomløper $S^1 \subset \mathbb{C}$. Hopf viste at η ikke er homotop med en konstant avbildning, fordi fibrene over to ulike punkter i S^2 er to sirkler $A = \eta^{-1}(x_1)$ og $B = \eta^{-1}(x_2)$ som er *lenket* i S^3, dvs. den ene sirkelen passerer gjennom den andre.

Ved å bruke Hamilton-kvaternionene $\mathbb{H}$, eller Cayley-oktonionene $\mathbb{O}$ i stedet for de komplekse tall, kan man konstruere tilsvarende Hopf fibreringer:

$$\nu \colon S^7 \to S^4 \quad \text{og} \quad \sigma \colon S^{15} \to S^8 \,.$$

Disse representerer ikke-trivielle elementer (av uendelig orden) $\eta \in \pi_3(S^2)$, $\nu \in \pi_7(S^4)$ og $\sigma \in \pi_{15}(S^8)$. Til kontrast minner vi om at $H_k(S^n) = 0$ for alle $k > n$.

L.S. Pontryagin viste i perioden 1938–50 at homotopi-gruppen $\pi_k(S^n)$ kan fortolkes geometrisk som kobordisme-klasser av glatte $(k-n)$-dimensjonale mangfoldigheter $M \subset \mathbb{R}^k$, utstyrt med en trivialisering av den n-dimensjonale normalbunten. For $k = n+1$ og $k = n+2$ er klassifikasjonen av henholdsvis 1- og 2-dimensjonale mangfoldigheter godt kjent, og dette var nok til at man kunne vise at $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ generert av Hopf fibreringen η, mens $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2$ for alle $n \geq 3$, generert av passende *suspensjoner* av η. Videre annonserte Pontryagin at $\pi_{n+2}(S^n)$ er triviell, men rettet dette i 1950 (samtidig med John Henry Constance Whitehead ?) til $\pi_{n+2}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2$ for $n \geq 2$.

For mangfoldigheter av dimensjon ≥ 3 vet man for lite om den geometriske klassifikasjonen til at det er noen hjelp. Dermed stod man etter 1930- og 40-tallet nesten uten metoder for å identifisere de høyere homotopi-gruppene av selv de enkleste celle-kompleksene, nemlig sfærene.

Eilenberg–Mac Lane komplekser.

Men det finnes andre, mye mer kompliserte celle-komplekser, som er bygget slik at det skal være lett å beregne deres homotopi. De er naturlige som homotopiteoretiske objekter, men er ikke i seg selv geometriske. Eilenberg og Saunders Mac Lane (1950) studerte for hvert naturlig tall n og gruppe π (abelsk hvis $n \geq 2$) et celle-kompleks $K(\pi, n)$ med den karakteristiske egenskapen at

$$\pi_k K(\pi, n) = \begin{cases} \pi & \text{hvis } k = n, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Dvs. $K(\pi, n)$ har bare én ikke-triviell homotopi-gruppe, omtrent som at sfæren S^n bare har én ikke-triviell homologi-gruppe (i positive grader). Akkurat som at sfærene er de enkleste bygge-stenene i celle-komplekser, og gjør deres homologi beregnbar, så er Eilenberg–Mac Lane rommene $K(\pi, n)$ de enkleste bygge-stenene i rom som er bygget etter en annen prosess, og som gjør deres homotopi beregnbar.

Eilenberg og Mac Lane forsøkte å bestemme homologien til rommene $K(\pi, n)$, men det var Serre (1953) og Cartan (1954–55) som først klarte å finne en fullstendig beskrivelse av deres homologi, ved hjelp av Steenrods kohomologi-operasjoner og Serre spektralsekvensen.

Det er en viss asymmetri i dette bildet. Sfærene S^n er bygge-stener for celle-komplekser, har meget enkel homologi og ekstremt komplisert homotopi. Dualt er Eilenberg–Mac Lane rommene $K(\pi, n)$ en annen slags bygge-materialer, som har forholdsvis komplisert homologi og meget enkel homotopi. Asymmetrien ligger i at homotopi-gruppene $\pi_*(S^n)$ av sfærer er så mye mer kompliserte enn homologi-gruppene $H_*(K(\pi, n))$ til Eilenberg–Mac Lane rom.

Vi kan også slutte sirkelen tilbake fra Eilenberg–Mac Lane rommene til kohomologi og homologi. Det er en naturlig isomorfi

$$H^n(X; \pi) \cong [X, K(\pi, n)]$$

for hvert celle-kompleks X, der parentesene betyr homotopi-klasser av (basispunkt-bevarende) avbildninger $X \to K(\pi, n)$. Når π er en kropp, eller $H_{n-1}(X) = 0$, så er det en isomorfi

$$H^n(X; \pi) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X), \pi)\,.$$

Sammen med Hurewicz-isomorfien og dualiteten mellom homologi og kohomologi følger det at for X et enkelt-sammenhengende rom med $\pi_i(X) = 0$ for alle $i < n$ så er det naturlige isomorfier

$$\mathrm{Hom}(\pi, \pi) \cong \mathrm{Hom}(H_n(X), \pi) \cong H^n(X; \pi) \cong [X, K(\pi, n)]$$

der $\pi = \pi_n(X) \cong H_n(X)$ er den første (laveste) homotopi-gruppen til X. Spesielt svarer identitetshomomorfien $\pi \to \pi$ til en avbildning

$$f \colon X \to K(\pi, n)$$

som induserer en isomorfi mellom de laveste homotopi-gruppene $f_* \colon \pi_n(X) \cong \pi_n K(\pi, n)$.

Méthode à "tuer" le groupe d'homotopie.

Cartan og Serre (1952) viste hvordan f gir opphav til en fiber-sekvens

$$K(\pi, n-1) \to Y \xrightarrow{p} X$$

der projeksjonen $p \colon Y \to X$ induserer en isomorfi på alle homotopi-grupper unntatt π_n, og $\pi_n(Y)$ er triviell. Rommet Y har da samme homotopi-grupper som X, unntagen $\pi_n(Y)$, som er triviell. Den laveste homotopi-gruppen $\pi_n(X)$ er da "drept" i Y.

Projeksjonen p er en *Serre-fibrering*, en fleksibel homotopi-teoretisk generalisering av fiberbunt-begrepet, som Serre hadde identifisert i sin doktoravhandling. Diagrammet ovenfor sier at hver fiber til p er et Eilenberg–Mac Lane rom av typen $K(\pi, n-1)$. Det oppstår ved pullback langs avbildningen $f \colon X \to K(\pi, n)$ av vei-løkke-fibreringen til $K(\pi, n)$:

$$\Omega K(\pi, n) \to PK(\pi, n) \xrightarrow{p} K(\pi, n)\,.$$

Her er $PK(\pi, n)$ det kontraktible rommet av alle veier i $K(\pi, n)$ fra et gitt startpunkt, og løkkerommet $\Omega K(\pi, n)$ oppfyller betingelsen for å kunne brukes som et rom $K(\pi, n-1)$.

Induktivt kan Cartan og Serre så for ethvert enkelt-sammenhengende rom X danne et tårn av vertikale fibreringer (som nedenfor) der for hver k er $\pi_i(X_k) = 0$ for $i < k$, og hver projeksjon $p\colon X_{k+1} \to X_k$ induserer en isomorfi på π_i for alle $i \neq k$. Tårnet er satt sammen av Serre fibreringene

$$K(\pi_k(X), k-1) \to X_{k+1} \xrightarrow{p} X_k \,.$$

I rommet X_k er altså homotopi-gruppene $\pi_i(X)$ til X "drept," for alle $i < k$. Dette tårnet er dualt til det såkalte Postnikov-tårnet, og ble også studert av J.H.C. Whitehead, omtrent samtidig med Cartan og Serre.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "p"] \\
K(\pi_{k+1}(X), k) \arrow[r] & X_{k+2} \arrow[d, "p"] \\
K(\pi_k(X), k-1) \arrow[r] & X_{k+1} \arrow[d, "p"] \\
K(\pi_{k-1}(X), k-2) \arrow[r] & X_k \arrow[d, "p"] \\
 & \vdots \arrow[d, "p"] \\
K(\pi_2(X), 1) \arrow[r] & X_3 \arrow[d, "p"] \\
 & X
\end{tikzcd}$$

Spektralsekvenser.

En *spektralsekvens* er en algebraisk struktur som f.eks. beskriver en analyse av hvordan homologien til et kompleks C_*:

$$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} C_{k-1} \xleftarrow{d} C_k \xleftarrow{d} C_{k+1} \leftarrow \dots$$

som er utstyrt med en (voksende, uttømmende) filtrasjon av underkomplekser

$$0 \subset F_0C_* \subset \cdots \subset F_{s-1}C_* \subset F_sC_* \subset F_{s+1}C_* \subset \cdots \subset C_*$$

kan rekonstrueres fra homologien til de minimale subkvotientene i filtrasjonen

$$E^1_{s,*} = H_*(F_sC_*/F_{s-1}C_*)$$

for $s \geq 0$, ved trinnvis å sette disse sammen til homologien til de lengre subkvotienten i filtrasjonen

$$H_*(F_sC_*/F_{s-r}C_*)$$

for $r = 1, 2, \ldots$.

Utgangspunktet for spektralsekvensen kan være den bigraderte gruppen $E^1_{*,*}$, som vi tenker oss plassert i st-planet med

$$E^1_{s,t} = H_{s+t}(F_sC_*/F_{s-1}C_*)$$

i bigrad (s,t). Her kalles s *filtrasjonsgraden* og $s+t$ den *totale graden.* t kalles *fiber-graden*, eller den *komplementære graden.* Termen "spektral" henviser til hvordan analysen trinnvis tar for seg forholdet mellom strataene $F_sC_*/F_{s-1}C_*$ og $F_{s-r}C_*/F_{s-r-1}C_*$ i filtrasjons-avstand r, for voksende avstander r. Den første algebraiske analysen av denne typen ble utført av Roger C. Lyndon (1948), uten bruk av spektralsekvenser, mens Jean Leray (1950), Cartan og Serre (1951) utviklet den algebraiske strukturen vi studerer i dag.

I grensen når $r \to \infty$ er homologien

$$H_* = H_*(C_*)$$

rekonstruert i følgende forstand: Det er en (voksende, uttømmende) filtrasjon av H_* gitt ved

$$F_sH_* = \mathrm{im}(H_*(F_sC_*) \to H_*(C_*)) \subset H_*$$

og spektralsekvensen slutter med en bigradert gruppe $E^\infty_{*,*}$ som også er plassert i st-planet med en gruppe

$$E^\infty_{s,t}$$

i bigrad (s,t). Disse er knyttet til hverandre ved at E^∞-leddet er de minimale subkvotientene til filtrasjonen

$$0 \subset F_0H_* \subset \cdots \subset F_{s-1}H_* \subset F_sH_* \subset F_{s+1}H_* \subset \cdots \subset H_*$$

av $H_* = H_*(C_*)$, dvs. det er isomorfier

$$E^\infty_{s,*} \cong F_sH_*/F_{s-1}H_*$$

for alle $s \geq 0$. Vi kan derfor rekonstruere H_* fra $E^\infty_{*,*}$ ved å løse en sekvens av ekstensjonsproblemer

$$0 \to F_{s-1}H_* \to F_sH_* \to E^\infty_{s,*} \to 0\,.$$

Vi sier da at spektralsekvensen *konvergerer* til H_* og skriver:

$$E^r_{*,*} \Longrightarrow H_*$$

Hva er relasjonen mellom $E^1_{*,*}$ og $E^\infty_{*,*}$? Det er en sekvens av mellom-liggende ledd

$$E^1_{*,*}, E^2_{*,*}, \ldots, E^r_{*,*}, E^{r+1}_{*,*} \ldots$$

som alle er bigraderte abelske grupper, slik at for gitt (s, t) er

$$E^\infty_{s,t} = E^r_{s,r}$$

for r tilstrekkelig stor. For hver $r \geq 1$ har E^r-leddet $E^r_{*,*}$ et d^r*-differensial*

$$d^r_{s,t} \colon E^r_{s,t} \to E^r_{s-r,t+r-1}$$

av bigrad $(-r, r-1)$, som avbilder til venstre og opp i st-planet. d^r er avledet av differensialet d i kjedekomplekset C_*, og igjen er $d^r \circ d^r = 0$, så

$$\mathrm{im}(d^r) \subset \ker(d^r) \subset E^r_{*,*}$$

i hver bigrad. Vi kan derfor danne homologien av E^r-leddet med hensyn på d^r-differensialet

$$H_{s,t}(E^r_{*,*}, d^r) = \frac{\ker(d^r)}{\mathrm{im}(d^r)} = \frac{\ker(d^r_{s,t} \colon E^r_{s,t} \to E^r_{s-r,t+r-1})}{\mathrm{im}(d^r_{s+r,t-r+1} \colon E^r_{s+r,t-r+1} \to E^r_{s,t})}$$

som igjen er bigradert. Sammenhengen mellom E^r- og E^{r+1}-leddet er at E^{r+1}-leddet nettopp er homologien av E^r-leddet med hensyn på d^r-differensialet, dvs. det er isomorfier

$$E^{r+1}_{s,t} \cong H_{s,t}(E^r_{*,*}, d^r)$$

for alle $r \geq 1$ og $s, t \geq 0$. Termen "sekvens" refererer til denne sekvensen av ledd E^r for $r = 1, \dots, \infty$.

Slik er analysen av spektralsekvensen redusert til å bestemme differensialene d^r for alle $r \geq 1$, for da er E^{r+1}-leddet induktivt gitt som homologien av E^r-leddet med hensyn på dette differensialet. (Hvis f.eks. $d^r = 0$ er $E^{r+1} = E^r$.) E^∞-leddet er gitt som grensen av E^r-leddene, og homologien $H_* = H_*(C_*)$ er gitt opp til ekstensjoner av E^∞.

Dette er en komplisert algebraisk struktur, men den kan ofte håndteres, som Serre og Armand Borel (1953) sine doktoravhandlinger illustrerer.

Serre spektralsekvensen.

Den singulære homologien $H_*(X)$ til et rom X er per definisjon lik homologien til Eilenbergs singulære kompleks $C_* = C_*(X)$ til X. En filtasjon av rommet X gir så en filtrasjon av C_*, som gir opphav til en spektralsekvens som konvergerer til $H_*(X)$. For en Serre fibrering $p \colon E \to B$ med fiber F løfter Serre en naturlig filtrasjon av $C_*(B)$ til en filtrasjon av $C_* = C_*(E)$, som gir en spektralsekvens. Han kan beskrive E^1-leddet og d^1-differensialet, og beregner E^2-leddet som homologien av disse.

Teorem (Serre). *La $F \to E \xrightarrow{p} B$ være en Serre fibrering, med veisammenhengende fiber F og basisrom B, og la π være en abelsk gruppe. Det er en spektralsekvens*

$$E^2_{s,t} = H_s(B; H_t(F; \pi)) \Longrightarrow H_{s+t}(E; \pi)$$

som konvergerer til homologien til E med koeffisienter i π.

(Homologien til B er implisitt dannet med *lokale koeffisienter* i $H_*(F; \pi)$, i Norman Steenrods forstand, dvs. fundamentalgruppen $\pi_1(B)$ virker på $H_*(F; \pi)$. Dersom B er enkelt-sammenhengende så er denne virkningen triviell, og E^2-leddet er gitt ved vanlig homologi.)

Serre (1953) og Cartan (1954/55) beregnet $H_*(K(\pi, n))$ for alle endelig-genererte abelske grupper π. De bruker vei-løkke-fibreringene $K(\pi, n-1) \to PK(\pi, n) \to K(\pi, n)$ og Serre spektralsekvensen

$$E^2_{s,t} = H_s(K(\pi, n); H_t(K(\pi, n-1))$$

som konvergerer til homologien av det kontraktible veirommet, som er 0 i alle positive grader $s + t > 0$. Herfra kan man bestemme $H_*(K(\pi, n))$ induktivt fra $H_*(K(\pi, n-1))$. Hvis π er endelig viser det seg at $H_k(K(\pi, n))$ er endelig i hver grad $k > 0$, og hvis π er endelig-generert er $H_k(K(\pi, n))$ også endelig-generert i hver grad.

Dette har følgende konsekvens, som først ble vist i Serres doktoravhandling: La X være et enkelt-sammenhengende rom. I Cartan–Serre tårnet kan man til en viss grad beregne $H_*(X_{k+1})$ induktivt fra $H_*(X_k)$, ved fibersekvensen $K(\pi_k(X), k-1) \to X_{k+1} \to X_k$ og Serre spektralsekvensen

$$E^2_{s,t} = H_s(X_k; H_t(K(\pi_k(X), k-1))) \Longrightarrow H_{s+t}(X_{k+1})\,.$$

Dette er nok til å vise at dersom $H_*(X)$ er endelig (hhv. endelig-generert) i hver positiv grad så er også $H_*(X_k)$ endelig (hhv. endelig-generert) i hver positiv grad, for hver $k \geq 2$. Fra Hurewicz-teoremet $\pi_k(X) \cong \pi_k(X_k) \cong H_k(X_k)$ følger da at også $\pi_k(X)$ er endelig (hhv. endelig-generert), for hver $k \geq 2$.

Teorem (Serre). *Hvis X er enkelt-sammenhengende med $H_*(X)$ endelig (hhv. endelig-generert) i hver positiv grad, så er også homotopi-gruppene $\pi_*(X)$ endelig (hhv. endelig-generert) i hver grad. Spesielt er hver homotopi-gruppe $\pi_k(S^n)$ endelig-generert.*

Med rasjonale koeffisienter er Serres beregning av homologien til Eilenberg–Mac Lane rommene forholdsvis enkel:

$$H_*(K(\mathbb{Z}, n)) \otimes \mathbb{Q} \cong H_*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}\{1, x\} & \text{for } n \text{ odde,} \\ \mathbb{Q}\{1, x, x^2, \dots\} & \text{for } n \text{ jevn.} \end{cases}$$

Her er $x \in H_n$ en klasse i grad n, og $x^i \in H_{in}(X)$ for hver $i \geq 0$. Produktet på $H_*(K(\mathbb{Z}, n))$ er i dette tilfellet Pontryagin-produktet $*$ som kommer fra at $K(\mathbb{Z}, n) = \Omega K(\mathbb{Z}, n+1)$ er et løkke-rom.

Teorem (Serre). *For hver $k > n$ er $\pi_k(S^n)$ en endelig gruppe, kun med unntak av tilfellene $\pi_{2n-1}(S^n)$ for n jevn, og alle disse er endelig-genererte abelske grupper av rang* 1.

Bevis. For n odde viser man dette ved å bemerke at den kanoniske avbildningen

$$f \colon S^n \to K(\mathbb{Z}, n)$$

som induserer en isomorfi $f_* \colon \pi_n(S^n) \to \pi_n(K(\mathbb{Z}, n)) = \mathbb{Z}$ også induserer en isomorfi i rasjonal homologi. Det følger at det neste stadiet $E = S^n_{n+1}$ i Cartan–Serre tårnet har triviell rasjonal homologi, dvs. at alle homologi-gruppene til E er endelige. Derfor er også homotopi-gruppene $\pi_k(E)$ endelige, og for $k > n$ er $\pi_k(E) \cong \pi_k(S^n)$.

For n jevn er det litt mer arbeid. Vi bruker samme fibersekvens

$$K(\mathbb{Z}, n-1) \to E \xrightarrow{p} S^n$$

der nå $n-1$ er odde, så $H_*(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\{1, y\}$ med y i grad $(n-1)$. Samtidig er $H_*(S^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\{1, x\}$ med x i grad n. Serre spektralsekvensen for fibreringen er

$$E^2_{*,*} = H_*(S^n; H_*(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})) \cong \mathbb{Q}\{1, x, y, xy\} \Longrightarrow H_*(E; \mathbb{Q})$$

med x i bigrad $(n, 0)$, y i bigrad $(0, n-1)$ og xy i bigrad $(n, n-1)$.

Vi påstår at $E^2 = E^n$, men det er et d^n-differensial

$$d^n_{n,0} \colon H_n(S^n; \mathbb{Q}) \to H_{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})$$

som er en isomorfi, med $d^n(x) = y$ opp til en faktor i $\mathbb{Q}^\times$. For $\pi_n(E) = 0$ er drept, så $H_k(E)$ er null for alle $0 < k \le n$. Derfor kan ikke x og y overleve til E^∞-leddet i spektralsekvensen, og den eneste måten det kan skje på er at det er et slikt ikke-trivielt d^n-differensial.

Da er $x \notin \ker(d^n)$ og $y \in \operatorname{im}(d^n)$, så disse generatorene kommer ikke med til E^{n+1}. Så

$$E^{n+1} = E^\infty = \mathbb{Q}\{1, xy\}\,.$$

Derfor er $H_*(E; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\{1, xy\}$, med xy i grad $(2n-1)$, dvs. det er en rasjonal ekvivalens $E \to S^{2n-1}$. Her er $(2n-1)$ et odde-tall, så vi har allerede vist at $\pi_k(S^{2n-1})$ er endelig unntatt for $k = 2n-1$, hvor gruppen har rang 1. For $k > n$ er $\pi_k(E) \cong \pi_k(S^n)$, så dette beregner rangen til alle de høyere homotopi-gruppene til S^n. $\square$

Ved å arbeide med kohomologi med koeffisienter i primkroppen $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$, for hvert primtall p, beregner Serre (1953) også p-torsjonen i gruppene $\pi_k(S^n)$ for alle $k \le n+8$. Stabilt er $\pi_{n+i}(S^n)$ isomorf med

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/24, \quad 0, \quad 0, \quad \mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/240, \quad (\mathbb{Z}/2)^2$$

for $i = 0, 1, \dots, 8$ og $n \ge i+2$.

Videre arbeid langs denne linjen bestemmer $\pi_{n+i}(S^n)$ for $i \le 13$, men et nytt problem oppstår for $i = 14$. Det arter seg som et mulig differensial i en Serre spektralsekvens, som det er vanskelig å avgøre om er 0 eller ikke med disse metodene. Det viser seg å være relatert til ikke-eksistensen av en 16-dimensjonal divisjonsalgebra, eller en trivialisering av tangentbunten TS^{15}.

Hirosi Toda (1958) og Shichiro Oka (1971–75) bruker produkter og høyere komposisjoner i $\pi_*(S^n)$ for å føre dette videre til $i \le 19$, og $i \le 22$, men støter igjen på et problem for $i = 23$, som er knyttet til forskjellen mellom topologiske og heltallige modulære former av vekt $24/2 = 12$.

J. Frank Adams (1958) introduserte en ny spektralsekvens, som systematiserer bruken av Steenrod-operasjonene i Serres metode, hvor de eneste differensialene er de som forklarer de hindringene vi nettopp har nevnt. Adams (1962) bruker så dette til fullstendig å løse problemet med vektorfelter på sfærer.

Teorem (Adams). *Det maksimale antallet ortonormale vektorfelter på S^{n-1} med $n = (2a+1)2^{c+4d}$, $0 \le c < 4$, er $(k-1)$ der $k = 2^c + 8d$.*

De stabile homotopi-gruppene $\pi_i^S = \pi_{n+i}(S^n)$ for n stor er koeffisient-gruppene til en generalisert homologi-teori representert av sfære-spekteret $\mathbb{S} = \{n \mapsto S^n\}$, med $\pi_*(\mathbb{S}) = \pi_i^S$. Dette spekteret har en slags sum og produkt, som gjør det til en "vidunderlige ny ring" i homotopi-teoretisk forstand. Andre vidunderlige nye ringer er algebraer over $\mathbb{S}$, dvs. $\mathbb{S}$-algebraer, men sfærespekteret $\mathbb{S}$ er den initielle slike, akkurat som de hele tallene $\mathbb{Z}$ er den initielle ring i algebraisk forstand. Det topologiske begrepet generaliserer det algebraiske, så det er en naturlig "ring"-avbildning

$$h\colon \mathbb{S} \to \mathbb{Z}\,.$$

Serres resultater viser at homotopi-gruppene her er rasjonalt ekvivalente

$$h_*\colon \pi_i(\mathbb{S}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}\,.$$

Det nye med $\mathbb{S}$-algebraer i forhold til ringer = $\mathbb{Z}$-algebraer er derfor utelukkende torsjons-informasjon.

Det finnes mange andre spektralsekvenser konstruert av f.eks. Adams–Novikov, Atiyah–Hirzebruch, Bockstein, Bousfield–Kan, Brown–Gersten, Cartan–Eilenberg, Eilenberg–Moore, Grothendieck, Künneth, May, Miller, Milnor og Rothenberg–Steenrod. De utgjør nå den algebraiske topologens tøffeste verktøy for beregninger.

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo
E-mail address: `rognes@math.uio.no`