VASSILIEVS SPEKTRALFØLGE

John Rognes

15. oktober 1994

Resolventen.
La d, Γ_d og $\lambda : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}^N$ være valgt som før.

La $T = \{\{t_0, t'_0\}, \dots, \{t_q, t'_q\}\}$ være en samling krav om selvskjæringer, og $V = \{v_1, \dots, v_b\}$ en samling krav om singulariteter. La (T, V) generere (A, b)-konfigurasjonen J, og la $\theta \in \chi(\Gamma_d, J)$ respektere (T, V)-kravene. Da er

$$\{\theta\} \times \Delta(\lambda\{t_0, t'_0\}, \dots, \lambda\{t_q, t'_q\}, \lambda\{v_1, v_1\}, \dots, \lambda\{v_b, v_b\})$$

et $(q + b)$-simpleks i $\Gamma_d \times \mathbb{R}^N$, som kalles et standardsimpleks. Resolventen $\sigma \subset \Gamma_d \times \mathbb{R}^N$ er unionen av alle slike standardsimplekser, og projekjonen $\Gamma_d \times \mathbb{R}^N \to \Gamma_d$ avbilder σ via en ekvivalens i lukket homologi til diskriminantmengden $\Gamma_d \cap \Sigma$.

La cellen $C_{(T,V)} \subset \sigma$ være unionen av det indre av standardsimpleksene assosiert med θ og (T', V'), når (T', V') gjennomløper alle samlinger av krav ekvivalent med (T, V). Da er $C_{(T,V)}$ en lokalt triviell fiberbunt over den åpne $r(J)$-cellen av slike (T', V'), med fiber lik produktet av det affine rommet $\chi(\Gamma_d, J)$ og det åpne $(q+b)$-simplekset $\operatorname{int}\Delta(\lambda\{t_0, t'_0\}, \dots, \lambda\{t_q, t'_q\}, \lambda\{v_1, v_1\}, \dots, \lambda\{v_b, v_b\}) = \operatorname{int}\Delta_{\lambda(T,V)}$. Så $C_{(T,V)}$ er en åpen celle i σ.

La J-blokken $B_J \subset \sigma$ være unionen av alle cellene $C_{(T,V)}$ når (T, V) gjennomløper de samlinger av krav som genererer J. B_J er en lokalt triviell fiberbunt over den åpne $r(J)$-cellen av (A, b)-konfigurasjoner J' ekvivalent med J, med fiber lik produktet av det affine rommet $\chi(\Gamma_d, J)$ og det åpne underrommet av sammenhengende grafer $S_J \subseteq \Delta_J$.

Her er $\Delta_J = \Delta_{\lambda(T,V)}$ med (T, V) den maksimale samlingen av krav som genererer J, og $\Delta_{\lambda(T,V)}$ det affine simplekset i $\mathbb{R}^N$ generert av billedene av disse kravene under λ. S_J er underrommet lik unionen av det indre av fasettene i Δ_J svarende til delmengder av (T, V) som genererer den samme (A, b)-konfigurasjonen J.

Vi viste forrige gang at $\bar{H}_*(S_J)$ er konsentrert i grad $f(J) - 1$, og er fri abelsk av rang $(a_1 - 1)! \cdots (a_\ell - 1)!$.

Spektralfølgen.
Vassilievs spektralfølge i grad d kommer fra følgende filtrasjon av σ. La σ_i være unionen av J-blokkene B_J med $f(J) \le i$. Γ_d er generisk valgt, så $\sigma_{3d} = \sigma$. Assosiert til filtrasjonen

$$\sigma_1 \subset \cdots \subset \sigma_{3d} = \sigma$$

setter vi $E^1_{p,q}(d) = \bar{H}_{p+q}(\sigma_p - \sigma_{p-1})$, og får en homologisk spektralfølge som konvergerer mot $\bar{H}_{p+q}(\sigma)$. Vi omindekserer til kohomologisk notasjon $E_1^{p,q}(d) =$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

$E^1_{-p,3d-1-q}(d)$. Vi kaller området med $-(3d+1)/5 \leq p \leq 0$ det stabile området, og området med $-3d \leq p < -(3d+1)/5$ det ustabile området.

Anta nå at vi er i det stabile området, dvs. velg i med $0 \leq i \leq (3d+1)/5$ og se på J-blokker i stratumet $\sigma_i - \sigma_{i-1}$. Kodimensjonen til $\chi(\Gamma_d, J)$ er da lik $3f(J)$. Så cellene $C_{(T,V)}$ med $f(J) = i$ danner en CW-dekomposisjon av stratumet $\sigma_i - \sigma_{i-1}$. For en fast J med $f(J) = i$ er blokken B_J unionen av åpne celler $C_{(T,V)}$. Blokken, eller disse cellene, ligger som et produkt av en fast åpen celle med henholdsvis S_J, eller med de åpne simpleksene i $S_J \subseteq \Delta_J$. Så vi kan avlese insidensrelasjonene mellom cellene $C_{(T,V)}$ i B_J fra insidensrelasjonene mellom simpleksene i S_J.

En hjelpefiltrasjon.

Den lukkede homologien til B_J er konsentrert i grad $3d-3f(J)+r(J)+(f(J)-1) = 3d-1-(2f(J)-r(J))$. Så vi kan filtrere stratumet $\sigma_i - \sigma_{i-1}$ videre som

$$F_{2i-1} \subset \cdots \subset F_0 = \sigma_i - \sigma_{i-1}$$

hvor

$$F_k = \cup_{J:2f(J)-r(J)\geq k} B_J.$$

Spektralfølgen assosiert til denne hjelpefiltrasjonen er analog til spektralfølgen assosiert til skjelettfiltrasjonen til et cellekompleks, ved at den er konsentrert i en rad, og dermed degenererer ved sitt E^2-ledd. Dens E^1-ledd er et kjedekompleks $(\bar{E}^1, \bar{d}^1)$ med grupper $\sum_{J:2f(J)-r(J)=k} \bar{H}_{3d-1-(2f(J)-r(J))}(B_J)$. Homologien til dette kjedekomplekset er kolonnen $E^1_{i,*}(d)$ i Vassilievs homologiske spektralfølge. Så vi kan tenke på dette komplekset som et E_0-ledd for denne spektralfølgen, hvor d^0-differensialene er gitt ved insidensrelasjonene mellom de forskjellige J-blokkene B_J med $f(J) = i$ og med hosliggende antall geometriske punkter $r(J)$.

Så vi kan skrive, i kohomologisk notasjon:

$$E_0^{p,q}(d) = \sum_{J:f(J)=-p,2f(J)-r(J)=p+q} \bar{H}_{3d-1-(2f(J)-r(J))}(B_J) \Longrightarrow \tilde{H}^{p+q}(\Gamma_d - \Gamma_d \cap \Sigma)$$

Her er $\bar{H}_{3d-1-(2f(J)-r(J))}(B_J) \cong \bar{H}_{f(J)-1}(S_J)$ som er fri abelsk av kjent rang når J er en (A,b)-konfigurasjon med $A = (a_1 \geq \cdots \geq a_\ell)$.

Den stabiliserte spektralfølgen.

Det følger at leddet $E_0^{p,q}(d)$ av Vassilievs spektralfølge er uavhengig av d i det stabile området, og mer generelt er $E_r^{p,q}(d)$ uavhengig av d når ingen differensialer av lengde mindre enn r kan nå bigraden (p,q) fra det ustabile området. Vi får definert en stabilisert Vassiliev spektralfølge $E_r^{p,q}$ med $E_r^{p,q} = E_r^{p,q}(d)$ for d tilstrekkelig stor. Tilsvarende betraktninger viser at differensialene også stabiliserer.

Knuteinvariantene.

Hvis vi bare er interessert i knuteinvarianter i $\tilde{H}^0(\Gamma_d - \Gamma_d \cap \Sigma)$ kan vi trunkere E^0-leddet i spektralfølgen til klassene i bigrader $(-i,i)$ og $(-i,i+1)$. Dette svarer til bare å studere den delen av diskriminanten som består av J-blokker med $0 \leq 2f(J) - r(J) \leq 1$, som tilsvarer tre typer (A,b)-konfigurasjoner. Vi lister de som bidrar i filtrasjon i.

(1) $A = (2,2,\ldots,2,2)$, $\ell(A) = i$, $b = 0$. B_J består av én $(3d-1)$-celle $C_{(T,V)}$.

(2) $A = (3, 2, \dots, 2, 2)$, $\ell(A) = i - 1$, $b = 0$. B_J består av én $(3d-1)$-celle og tre $(3d-2)$-celler på randen, hver med insidens ± 1 til den sentrale cellen. De tre $(3d-2)$-cellene representeres av hver sin merkede (A, b)-konfigurasjon J^*, hvor ett av de tre punktene svarende til trippelpunktet ($a_1 = 3$) er merket med en $*$. (Sammenlign med strukturen til $S_3 \subset \Delta_3$.)

(3) $A = (2, 2, \dots, 2)$, $\ell(A) = i - 1$, $b = 1$ og det singulære punktet er disjunkt fra A-konfigurasjonen. B_J består av én $(3d-2)$-celle.

Vi får følgende beskrivelse av det trunkerte E_0-leddet.

Sats (Vassiliev). *$X_i = E_0^{-i,i}$ er en sum av to fri abelske grupper, med generatorer svarende til $(3d-1)$-cellene i $\sigma_i - \sigma_{i-1}$ av typene ovenfor. Den første gruppen er generert av isomorfiklassene av (A, b)-konfigurasjoner J av type (1) ovenfor. Den andre gruppen er generert av isomorfiklassene av (A, b)-konfigurasjoner J av type (2) ovenfor.*

$Y_i = E_0^{-i,i+1}$ er en sum av to fri abelske grupper, med generatorer svarende til $(3d-2)$-cellene i $\sigma_i - \sigma_{i-1}$ av typene ovenfor. Den første gruppen er generert av isomorfiklassene av merkede (A, b)-konfigurasjoner J^* av type (2) ovenfor, med ett av trippelpunktene markert. Den andre gruppen er generert av isomorfiklassene av (A, b)-konfigurasjoner J av type (3) ovenfor.

d_0-differensialet $d_0 : E_0^{-i,i} \to E_0^{-i,i+1}$ er homomorfien $h_i : X_i \to Y_i$ definert (opp til fortegn) som følger. De tre merkede $(3d-2)$-cellene $C_{(T,V)}$ av type (2) har insidensgrad ± 1 til hver $(3d-1)$-celle av type (1) som oppstår ved å oppløse det merkede trippelpunktet i ett dobbelpunkt, og til $(3d-1)$-cellen av type (2) hvor merkingen glemmes. En $(3d-2)$-celle av type (3) has insidensgrad ± 1 til cellene av type (1) hvor singulariteten oppløses til et dobbeltpunkt.

Vassiliev beskriver hvordan man kan orientere alle cellene og bestemme fortegnet på disse insidensgradene. For $i = 1$ er $h_1 : X_1 \to Y_1$ en isomorfi. For $i = 2$ er det en sum av et trippelpunkt (type (2)) og to dobbeltpunkter (type (1)) i som genererer kjernen av $h_2 : X_2 \to Y_2$. Denne sykelen i $E_1^{-2,2}$ overlever til $E^{-2,2}/\infty$ og er den første ikketrivielle Vassilievinvarianten, og er av type to.

Dette beskriver $E_1^{-i,i}$-leddet i Vassilievs stabiliserte spektralfølge. Han går videre med å beskrive en kombinatorisk algoritme for å bestemme de høyere differensialene i spektralfølgen, so vi ikke tar med her. (Er det høyere ikketrivielle differensialer ?)

Konvergens.

La $e > d$ være like tall. Vi kan velge $\Gamma_d \subset \Gamma_e$, og får restriksjonsavbildninger $\bar{H}_*(\Gamma_e - \Gamma_e \cap \Sigma) \to \bar{H}_*(\Gamma_d - \Gamma_d \cap \Sigma)$, som gir avbildninger $E_*(e) \to E_*(d)$. Vi kan oppfatte Vassilievs stabiliserte spektralfølge som en invers grense av spektralfølger $\{E_*(d)\}_d$, som hver seg konvergerer (strengt) til $\tilde{H}^*(\Gamma_d - \Gamma_d \cap \Sigma)$. Men inverse grenser og konvergens av spektralfølger konvergerer (typisk) ikke hvis det ikke er noen uniform øvre skranke for lengden av differensialene i spektralfølgene. Det er ukjent hvordan dette forholder seg for Vassilievs spektralfølger. Hvis en slik skranke finnes, vil invariantene av endelig type klassifisere knuter.

Konkret, se på to knuter θ og θ' av forskjellig type. For tilstrekkelig store d kan vi finne to polynomielle knuter i Γ_d som er av samme type som henholdsvis θ og θ'. Disse ligger da i forskjellige komponenter av $\Gamma_d - \Gamma_d \cap \Sigma$, og separeres av en klasse V i en passende $E_\infty^{-i,i}(d)$. Hvis $(-i, i)$ ligger i det stabile området vil V overleve til en klasse i den stabiliserte spektralfølgen $E_\infty^{-i,i}$, og gi en Vassilievinvariant av type i som separerer θ og θ'. Men vi kan godt være uheldige, slik at $(-i,i)$ ligger i det ustabile området for d, og selv om vi øker d til en større grad e kan klassen som separerer knutene i $E_\infty(e)$ nå ha flyttet til en fjernere bigrad $(-j,j)$, fortsatt utenfor det stabile områdte. Dersom dette skjer for vilkårlig store d vil ikke den stabiliserte spektralfølgen konvergere til kohomologien av knuterommet, og Vassilievs invarianter kan ikke skille mellom θ og θ'. Men skjer dette ?

Invarianter av endelig type.

Knuteinvariantene av type i i $\tilde{H}^0(\Gamma_d - \Gamma_d \cap \Sigma)$ ligger i den fri abelske gruppen generert av (ekvivalensklasser av (A,b)-konfigurasjoner J svarende til) dobbelpunkter og høyst ett trippelpunkt. Vi kan splitte av bidraget fra trippelpunktet ved å bytte ut trippelpunktet med et par av dobbeltpunkter, som illustrert med den første ikketrivielle Vassilievinvarianten; den av type to. Så alle Vassilievinvarianter er karakterisert ved deres verdier på kurver θ med endelig mange dobbeltpunkter og ingen høyere singulariteter. Birman og Lin [BL] tar dette som et aksiomatisk utgangspunkt for Vassilievs knuteinvarianter. De viser også at man kan skifte perspektiv tilbake til lukkede kurver i rommet eller S^3.

Definisjon. La $V : \{knuter\} \to A$ være en knuteinvariant med verdier i en abelsk gruppe A. La $\ell : S^1 \to S^3$ være en glatt lukket kurve uten singulære punkter, trippelpunkter eller høyere selvskjæringer. La $d \in \ell(S^1)$ være et transveralt dobbelpunkt i billedet, og la $\ell_+ : S^1 \to S^3$ og $\ell_- : S^1 \to S^3$ være små perturbasjoner av ℓ slik at dobbelpunktet d endres til en høyreorientert krysning i ℓ_+, og til en venstreorientert krysning i ℓ_-. Vi utvider så knuteinvarianten V induktivt til alle slike kurver ℓ ved formelen

$$V(\ell) = V(\ell_+) - V(\ell_-).$$

En knuteinvariant V sies å ha type $\leq n$ hvis $V(\ell) = 0$ for alle kurver ℓ med $> n$ dobbelpunkter. V har type n hvis V har type $\leq n$ men ikke $\leq n-1$. V har endelig type hvis V har type n for en endelig n.

Knuteinvariantene av type n med verdier i $\mathbb{Z}$ er klassene som overlever i $E_\infty^{-n,n}$ i Vassilievs stabiliserte spektralfølge.

Hopf algebraer.

La $\mathcal{V} = H^0(K - \Sigma; \mathbb{Q}) = \bigoplus_n \mathcal{V}_n$ være rommet av rasjonale knuteinvarianter, dualt til vektorrommet generert av mengden av knutetyper. $\mathcal{V}$ danner en algebra under punktvis addisjon og multiplikasjon. Videre kan vi addere knuter ved å la dem følge hverandre på en kurve, og dette definerer et koprodukt på $\mathcal{V}$ som gjør $\mathcal{V}$ til en Hopf algebra over $\mathbb{Q}$. En slik er generert som algebra av underrommet av primitive elementer $\mathcal{P} = \mathrm{Prim}(\mathcal{V}) = \bigoplus_n \mathcal{P}_n$, som her består av de additive knuteinvariantene. Alle knuteinvariantene i $\mathcal{V}$ kan skrives som polynomer i de primitive, så det er klart at invariantene i $\mathcal{P}$ separerer knuter like godt som hele $\mathcal{V}$.

Bar-Natan har beregnet dimensjonen til $\mathcal{P}_n$ for $n \leq 9$ til å være

$$(1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, 18, \dots).$$

Det er kjent at det er additive invarianter av type n for alle større n, men den asymptotiske veksten er ukjent.

(Kommentar om amphichirale knuter. Ingen kjente Vassilievinvarianter skiller mellom en knute og dens invers (med omvendt omløpsretning).)

(Formodning: Vassilievinvarianter separerer knuter. Står åpen.)