

Resultatrapport for NFR-prosjekt nr. 154077 "New Contexts for Geometry and Arithmetic"

Om målsettingene for prosjektet:

Det strategiske universitetsprogrammet i ren matematikk, også kalt SUPREMA, løp fra 1/1-2003 til 31/12-2006. Det tok utgangspunkt i forskningsmiljøene i

- algebraisk geometri (innen algebra)
- operatoralgebraer (innen analyse)
- algebraisk topologi og K-teori (innen geometri/topologi)

ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo, hver med ca. 6 faste vitenskapelige ansatte. Prosjektets mål var å sikre en best mulig utvikling av disse fagmiljøene i en overgangsperiode, der mange av de sentrale, ledende forskerne i miljøene pensjoneres, og mange unge forskere i fagområdet, med godt potensiale, ikke har faste stillinger i tilstrekkelig god tilknytning til levende forskningsmiljøer. Det ønskede resultatet var

- at de nye kreftene i disse fagområdene skulle få en reell sjanse til å fortsette med forskning på høyt internasjonalt nivå, med en tilstrekkelig god tilknytning til reelle forskningsmiljøer;
- at forskningsmiljøene dermed skulle vokse videre med nye personer, som samarbeider godt og har en god, aktuell faglig produksjon;
- at universitets- og høyskole-institusjonene ved nyansettelser skulle ha tilgang til en godt kvalifisert søkermasse, uten at for mange av forskerkandidatene har gått til andre typer stillinger.

Som en naturlig følge av dette generelle målet om å ha aktive forskningsgrupper har prosjektet også hatt som mål å utføre solid grunnforskning, som gjenspeiles i vitenskapelige publikasjoner og annen formidling.

Stipendiater, postdoktorander og gjesteforskere:

For å oppnå disse målene har prosjektet ansatt

- 1 stipendiat (Sindre Duedahl)
- 5 postdoktorander (Halvard Fausk, Andreas Knutsen, Christian Schlichtkrull, Trond Gustavsen og Kamran Reihani)
- 3 internasjonale gjesteforskere (Holger Reich, Silke Lekaas, Birgit Richter)

samt frikjøpt

- 5 gjesteforskere fra høyskolesektoren (Runar Ile, Trond Gustavsen, Lars Tuset, Arvid Siqveland og Jan Oddvar Kleppe).

Vi nøyde oss med én stipendiatstilling, fordi oppmerksomheten omkring rekrutteringsproblemetstillingen gjorde at tilgangen på stipendiatstillinger var god i 2003, og vi kunne ikke ansette stipendiater etter 1/1-2004 pga. prosjektets begrensede varighet.

Det var svært mange søkere til hver av postdoktor-stillingene, og de som ble ansatt har vist en utmerket utvikling som forskere. Tilgangen på faste stillinger var, som ventet, såpass moderat at alle postdoktorandene beholdt stillingene til de løp ut. Det samme gjelder de utenlandske gjesteforskerne, som alle kom fra midlertidige stillinger annensteds.

Frikjøpene fra høyskolesektoren har vært slik organisert at forskerne har beholdt sin faste ansettelse der, men at de har vært fristilt fra sine undervisningsoppgaver mot at prosjektet har betalt et beløp tilsvarende vikarkostnadene. Dermed har disse forskerne kunnet erstatte en 50% forskningsinnsats ved en høyskole med en 100% forskningsinnsats ved Universitetet i Oslo. Dette har vært en særdeles vellykket løsning, med stor faglig betydning for de frikjøpte gjesteforskerne. De har også utgjort et viktig stimulerende tilskudd til universitetsmiljøene. Omvendt har høyskolene fått fornyet sin faglige kompetanse ved denne utvekslingen. Dessuten har kostnadene med disse avtalene vært relativt lave, sammenliknet med fulltids-ansettelser ved UiO. Vi kan derfor sterkt anbefale at det settes av midler til liknende frikjøp i fremtiden, da dette er en meget kostnadseffektiv løsning.

Perioden ved UiO har gjort alle disse forskerne til attraktive søkere til faste stillinger, både nasjonalt og internasjonalt. Etter postdoc/frikjøps-perioden har

- Schlichtkrull og Ile gått til førsteamanuensis-stillinger ved Universitetet i Bergen;
- Richter og Reich gått til professorater ved hhv. Universitetet i Hamburg og Universitetet i Düsseldorf;
- Fausk, Knutsen, Reihani, Lekaas er i nye midlertidige stillinger.

Per dags dato er flere av de siste høyt rangert på søkerlisten til faste stillinger i Norge.

Arbeidsseminar, Masterclass og konferanser:

For å videreutvikle faggruppene, og særlig å stimulere samarbeidet og den faglige kunnskapsdelingen mellom faggruppene, har vi arrangert en rekke på seks arbeidsseminarer (omtrent som de tyske Arbeitsgemeinschaft, AG) for alle de tre forskningsmiljøene samlet, med temaene

- (1) Ikke-kommutativ geometri (våren 2003)
- (2) Atiyah og Botts Lefschetz-sporformel (høsten 2003)
- (3) Weil-formodningene (våren 2004)
- (4) Klassekroppsteori (høsten 2004)
- (5) Kroneckers "Jugendtraum" og Manins "Alterstraum" (våren 2005)
- (6) Modellkategorier (høsten 2005)

Her har (1), (2) og (5) brakt en stor del av forskerne inn i Alain Connes' ikke-kommutative geometri, og aktuelle problemstillinger som knytter denne nye konteksten for geometri til både tallteori og matematisk fysikk. Samtidig var (2) godt "timet" med tildelingen av Abelprisen til Michael Atiyah og Isadore Singer våren 2004. En noe mer klassisk geometrisk kontekst for tallteori er Alexander Grothendieck's skjemateori, og (3) og (4) brakte oss inn i Pierre Deligne's bevis av Riemann-hypotesen i positiv karakteristikk, samt

et viktig grunnlag for moderne tallteori og (5). En annen ny kontekst for aritmetikk er topologenes strukturerte ringspektra, eller "brave new rings", og (6) ga en introduksjon til dette rammeverket. Arbeidsseminarene har vært godt besøkt, og har lyktes i å gi en stor del av disse faggruppene en større felles faglig basis på høyt nivå.

Ved å bygge på denne felles faglige basisen har vi kunnet arrangere to Masterclass'er om aktuell forskning:

(7) Andreas Rosenschon (SUNY): "Algebraic Cycles and K-theory"

(8) Jacob Lurie (Harvard): "Elliptic Cohomology and Derived Algebraic Geometry"

Her handler (7) om Vladimir Voevodskys motiviske homotopiteori og Daniel Quillens algebraisk K-teori, og (8) om det algebro-geometriske perspektivet på topologenes "brave new rings". Atiyah, Connes, Deligne, Grothendieck, Quillen og Voevodsky er alle Fieldsmedalje-vinnere.

Prosjektet har arrangert fem faglige konferanser, hvorav fire har fokusert på "tverrfaglige" presentasjoner mellom de tre faggruppene, som også har vært konstruktive bidrag til å gi faggruppene en stor felles referansebakgrunn.

Viktige forskningsresultater:

Siden arbeidene er publisert på engelsk føres de følgende beskrivelsene også i dette språket.

Algebraic Geometry: The degeneration of manifolds to simpler combinatorial objects is an important method of analysis. Some interesting special examples are treated by Ranestad and Melliez in a paper on $(1,7)$ polarized abelian surfaces. For the converse deformation less is known, but an important class is now accessible due to the computation by Christophersen and Altmann of the cotangent cohomology of Stanley-Reisner rings.

The space of deformations of important classes of modules over rational singularities are computed by Gustavsen and Ile. A natural question is to find conditions for the existence of connections on certain modules. Gustavsen and Eriksen have produced some thorough results in this direction.

Several participants of the programme have been working on non-commutative algebraic geometry from the point of view of deformation theory. Results have been obtained by Siqveland on three-dimensional Lie algebras and endomorphisms, and by Sletsjøe and Laudal together with Jøndrup, on finite-dimensional representations of algebras, including the completion theorem for extensions. Eriksen has described non-commutative deformations of D -modules. Hitching and Sletsjøe have investigated how non-commutative geometry can be applied to vector bundles.

Kleppe has described families of artinian algebras as quotients of one-dimensional algebras. In another vein, Knudsen has characterized curves on $K3$ surfaces and Enriques surfaces in terms of their linear series, while Ranestad, together with Abo, has given new examples of rational surfaces in P^4 .

Operator Algebras: The appearance of random walks in operator algebras can be traced back to the 70s, to the study of AF-algebras and of group actions on them. Until recently, however, they were only used in the study of algebraic invariants. A few years ago M. Izumi observed that the algebras themselves can sometimes be regarded as boundaries of quantum random walks, which establishes a new framework to analyze concrete models, apply classical probabilistic tools and look for their noncommutative analogues. In the paper "Poisson boundary of the dual of $SU_q(n)$ " by M. Izumi, S. Neshveyev and L. Tuset the Poisson boundary of the dual of $SU_q(n)$ is shown to be isomorphic to the quantum flag manifold. The proof relies on a surprising connection between the Poisson integral and the Berezin transform. The main technical result says that a sequence of Berezin transforms defined by a random walk on the dominant weights of $SU(n)$ converges to the identity on the quantum flag manifold. This is a random q -analogue of some known results on quantization of coadjoint orbits of Lie groups. The result can also be considered as a dual counterpart of classical results of Furstenberg on boundaries of semisimple groups.

The notion of a spectral triple introduced by Connes provides a powerful generalization of Riemannian geometry to noncommutative spaces. Consani and Marcolli constructed a spectral triple describing the geometry of the special fibers at the archimedean places of an arithmetic surface in the form of a theta-summable spectral triple for the action of a Kleinian Schottky group on its limit set. In the paper "Noncommutative geometry on trees and buildings" by G. Corenlissen, M. Marcolli, K. Reihani and A. Vdovina this construction is improved and a finitely summable spectral triple is obtained. This is important as it makes it possible to extract geometric invariants through zeta-functions and the Connes-Moscovici local index formula.

Around ten years ago Bost and Connes introduced an interesting C^* -dynamical system associated with the field of rational numbers that is related to problems of explicit class field theory and spectral realization of zeroes of the zeta-function. Recently Connes and Marcolli introduced a GL_2 -system, a two dimensional analogue of the Bost-Connes system. They analyzed the space of KMS-states of the system for inverse temperatures outside the critical region $(1,2]$. The analysis of the system is completed in the paper "Phase transition in the Connes-Marcolli GL_2 -system" by M. Laca, N.S. Larsen and S. Neshveyev. It is shown that for each inverse temperature in the critical region there exists a unique KMS-state. This uniqueness turned out to be related to equidistribution of Hecke points on the modular curve.

Algebraic Topology: P.A. Østvær has cooperated with B. Dundas, O. Roendigs and A. Rosenschon on a number of projects in motivic homotopy theory and algebraic K-theory, including the proof by Rosenschon and Østvær (Invent. Math., 2006) of a "rigidity theorem for pseudo pre-theories" extending and generalizing fundamental results of Suslin, and of Suslin-Voevodsky.

B. Jähren, T.A. Kro and H. Reich have cooperated with S. Kwasik, N. Baas, M. Bökstedt and A. Barthels on the relation between (mid-) and high-dimensional geometric topology and algebraic K-theory, including a contribution by Jähren and Kwasik (Topology, 2003) to the Borel conjecture.

J. Rognes has cooperated with A. Baker and B. Richter on the Galois-theoretic viewpoint on structured ring spectra, starting with a monograph by Rognes (AMS Memoirs, to appear). This is the basis for a more algebro-geometric point of view on the multiplicative cohomology theories that arise in stable homotopy theory, continuing in Rognes' YFF-project.

The algebraic K-theory of structured ring spectra, and their trace invariants in topological cyclic homology, has also been extensively studied by Jahren, Rognes, Reich, Ch. Schlichtkrull and S. Lunøe-Nielsen.

The fundamental bridge between algebraic K-theory and high-dimensional geometric topology is the stable parametrized h-cobordism theorem. In the context of the SUPREMA program, Jahren and Rognes have cooperated with F. Waldhausen to finally complete this basic theorem, which has been in preparation since 1979. It is now, at last, ready for publication.

Ressursbruk:

Bruken av de tildelte midler fra NFR har i meget stor grad foregått i overensstemmelse med plan og budsjett for prosjektet. Det har vært et planlagt overforbruk av midler i de to midterste årene. Dette skyldes at tilsatte ved prosjektet har hatt stipendperioder på 2 eller 3 år, og for å holde ansettelsene innenfor tidsrammen har dette vært en nødvendig allokering av midler.

Prosjektet har allerede hatt stor betydning for oppfølgingen av de yngre forskerne i fagområdene, samt for forskningssamarbeidet mellom institusjonene i Norge, innen faggruppene og mellom faggruppene. Det har bidratt til å sikre et godt tilfang av kvalifiserte søkere til faste forsknings- og undervisningsstillinger nå og i den nære fremtid. Dette vil ha positive langsiktige følger for matematikkforskningen i Norge.

Etter prosjektslutt:

I tillegg til de 98 vitenskapelige artiklene og 8 bøkene basert på forskning knyttet til prosjektet som allerede er antatt eller publisert, er det ytterligere 50 matematisk ferdige vitenskapelige arbeider som er under forberedelse som preprint eller sendt inn til publikasjon, derav én bok:

Erik Bedos 2, Eivind Eriksen 4, Halvard Fausk 2, George Hitching 1, Runar Ile 3, Bjørn Jahren 1, Andreas Knutsen 3, Tore Kro 2, Nadia Larsen 2, Sverre Lunøe-Nielsen 3, Sergey Neshveyev 4, John Rognes 7, Kjetil Røysland 4, Arvid Siqveland 3, Arne B. Sletsjøe 2, Lars Tuset 6, Nils Øvreid 1.

(Listen er ikke komplett.) Disse tallene viser en meget klar økning i den faglige produksjonen blant deltagerne i prosjektet, fra prosjektets begynnelse til slutt.