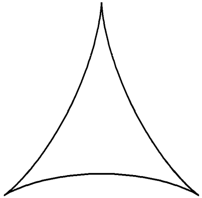
Matematisk studentkollokvium

12.mars 2010

En liten smakebit av Algebraisk geometri og Rasjonale cuspidale plane kurver

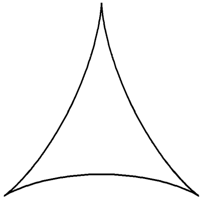


Torgunn Karoline Moe

CMA / Matematisk institutt

Universitetet i Oslo

De mest spennende objektene i verden



- Hvor mange og hva slags cusper kan en rasjonal cuspidal plan kurve ha?

Dette skal dere få høre om i dag

- Hva er algebraisk geometri?
- En enkel innføring i sentrale begreper
- Plane algebraiske kurver
- Litt lett singularitetsteori
- Rasjonale cuspidale plane kurver

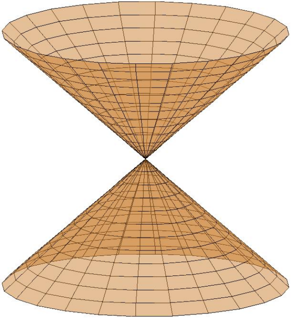
Noen enkle eksempler

- Kjeglen

  $x^2 + y^2 = z^2$ over $\mathbb{R}$.

- Pythagoreiske tripler

  $x^2 + y^2 = z^2$ over $\mathbb{N}$.



Algebraisk geometri i et nøtteskall

- Studiet av geometriske objekter ved hjelp av algebraiske metoder.
- Kan finne nye og overraskende egenskaper til både objektene og metodene.
- Hovedverktøy: kommutativ algebra.
  - Ringer
  - Idealer
  - Homomorfier
- Hovedobjekter: varieteter.
  - Kurver
  - Flater
  - Abstrakte varieteter

Bør jeg studere algebraisk geometri?

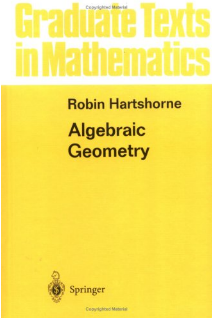
- JA!
- Spesielt hvis du likte
  - geometridelen i introkursene,
  - geometrikurset,
  - grupper, ringer og kropper.
- Men også hvis du liker
  - morsomme aha-opplevelser,
  - krevende utfordringer,
  - vakker og visuell matematikk.

Algebragruppa

- Godt miljø blant studentene.
  - Studentseminarer.
- Fantastiske voksne.
  - Ragni Piene
  - Geir Ellingsrud
  - Jan A Christophersen
  - Kristian Ranestad
  - Arne B Sletsjøe
  - Christin Borge
- Et par sosiale arrangementer i løpet av året.

Hvilke fag må jeg ta?

- **Topologi** (H)
- **Kommutativ algebra** (H)
- Geometriske strukturer (H)
  - Personlig anbefaling.
- **Algebraisk geometri I** (V)
  - Det helt sentrale.
- Algebraisk geometri **II** (V)
  - Hvis du virkelig liker det!
- Algebraisk geometri **III** (H)
  - Pensum varierer fra år til år.
  - Flest PhD-studenter, men absolutt mulig hvis du skriver kort oppgave.

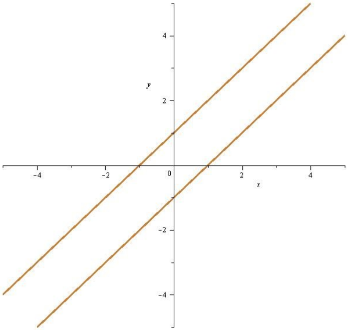


Hartshorne

- Inneholder de sentrale teknikkene og resultatene i algebraisk geometri.
- Ikke akkurat egnet for sofaen eller nattbordet.
- Du kommer til å like den etterhvert.

Vi starter med noe vi kjenner

- Algebraisk lukket kropp – $\mathbb{C}$.
- Det komplekse planet $\mathbb{C}^2$.



To parallelle linjer

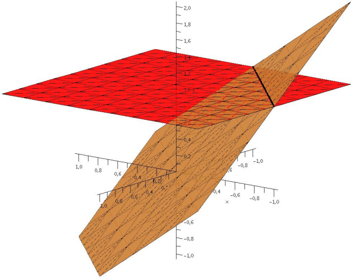
- Problemet med linjer i planet som ikke snitter hverandre.

Vil ha et mer oversiktlig univers

- Vi ønsker at to linjer skal møtes i ett punkt.
- Linjer i $\mathbb{C}^2$ skriver vi som

$$ax + by + c = 0, \; a, b, c \in \mathbb{C}.$$

- Vi kan tenke på dette i $\mathbb{C}^3$.
  - Snittet mellom planene $z = 1$ og $ax + by + cz = 0$.



  - Vi lar alle punkter på samme linje gjennom origo være samme punkt.

Det projektive planet – $\mathbb{P}^2$

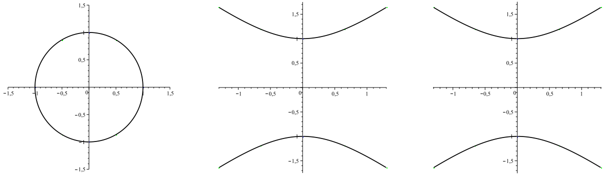
- $\mathbb{P}^2$ konstrueres ved å ta
  - $\mathbb{C}^3$
  - (x, y, z).
  - Fjerne origo.
  - $(0, 0, 0) \notin \mathbb{P}^2$.
  - La alle punkter på samme linje gjennom origo være samme punkt.
  - $(x : y : z) = (\lambda x : \lambda y : \lambda z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^*$.
- Vi har fått en projektiv linje – $ax + by + cz = 0$.
  - Alle leddene har samme grad.
  - Alle linjer i det projektive planet snitter hverandre.
  - Hvis vi lar $z = 1$, får vi tilbake den affine linja vi startet med, $ax + by + c = 0$.
- Problem – ikke så lett å "se", men vi har våre metoder.

Varieteter i $\mathbb{P}^2$

- Vi har allerede sett et eksempel – en linje.
- Dette kan vi generalisere:
  - Ta ett polynom F i variablene $x, \ y, \ z$.
    - Alle ledd har grad d.
    - Polynomet kan ikke faktoriseres.
  - Alle punkter $(x : y : z)$ som oppfyller $F(x, y, z) = 0$ utgjør en projektiv kurve av grad d.
- Varieteter er en samlebetegnelse på nullpunktsmengder til ett eller flere polynomer – som ikke kan deles opp i mindre nullpunktsmengder.

Eksempel på algebraisk kurve

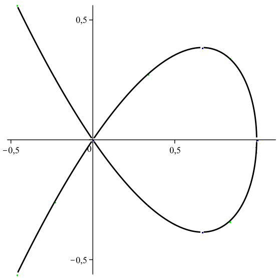
- Sirkelen $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



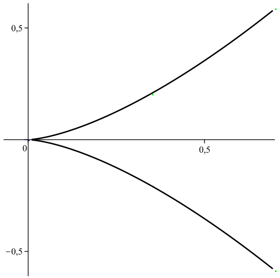
$z = 1$ $\qquad$ $y = 1$ $\qquad$ $x = 1$

- I det projektive planet over $\mathbb{C}$ er alle kjeglesnitt ekvivalente – sirkler, ellipser, hyperbler og parabler.
- Merk at også $x^n + y^n - z^n = 0$ er en plan algebraisk kurve!
- Da Fermats siste sats ble løst, var nettopp algebraisk kurveteori nøkkelen.

Flere eksempler – nå med interessante punkter



Den **nodale** kubikken $\mathcal{V}(zx^2 - zy^2 - x^3)$



Den **cuspidale** kubikken $\mathcal{V}(zy^2 - x^3)$

- Hvordan og hvorfor er disse spesielle og forskjellige?

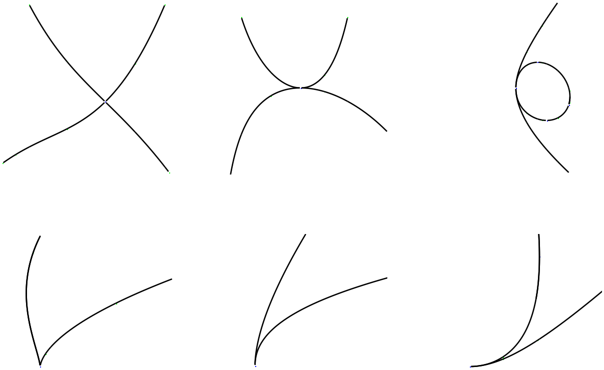
Singulære punkter

- Et punkt $a = (a_0 : a_1 : a_2)$ på en kurve gitt ved $F = 0$ kalles singulært hvis det er i nullpunktsmengden til alle partiellderiverte til F,
$$F_x(a) = F_y(a) = F_z(a) = 0.$$
- En kurve kan bare ha endelig mange singulære punkter.
- De andre punktene kalles glatte.

Kan vi skille singulære punkter fra hverandre?

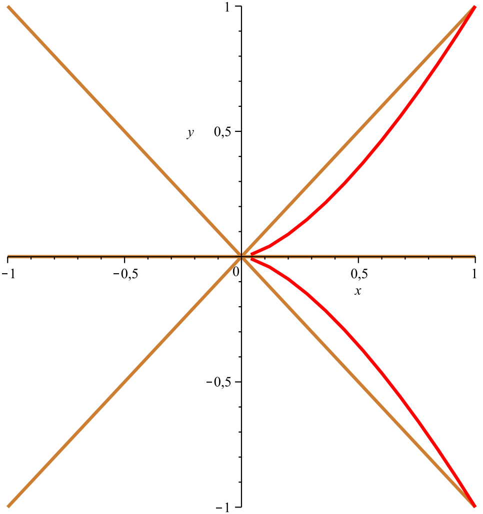
- Grener – antall ganger kurven passerer gjennom punktet.
  - En singularitet med mer enn en gren kalles multippelt punkt.
  - En singularitet med bare en gren kalles en cusp.
- Multiplisitet – sier noe om hvor mye singulært punktet er.
- Noden og cuspen har
  - samme multiplisitet: 2,
  - ulikt antall grener.

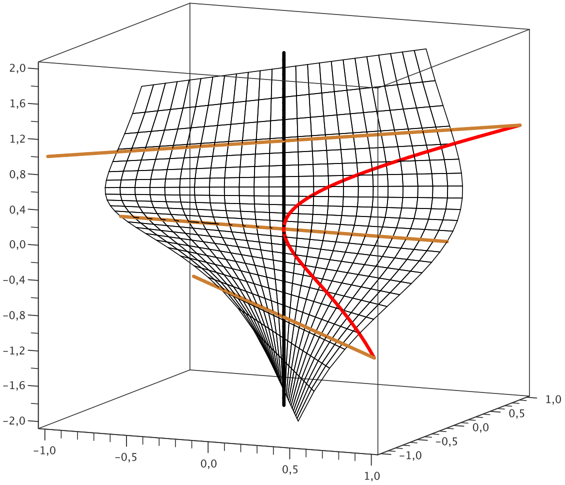
Singulære punkter med multiplisitet 2



Nærmere undersøkelser

- Kan titte inn i en singularitet ved å blåse den opp, gjerne flere ganger.




2,0
1,6
1,2
0,8
0,4
0,0
−0,4
−0,8
−1,2
−1,6
−2,0
−1,0
−0,5
0,0
0,5
1,0
−1,0
−0,5
0,0
0,5
1,0

Verdt å merke seg om cusper

- Når en cusp blåses opp er det bare ett punkt som korresponderer til singulariteten.
- Dette punktet kan fremdeles være singulært.
- Da blåser vi opp igjen.
- La m_i være multiplisiteten til den gjenstående singulariteten etter i oppblåsninger.
- Kan for cusper definere multiplisitetssekvensen $\overline{m}$
  - $\overline{m} = (m, m_1, \ldots, m_s)$.
  - Har $m \geq m_1 \geq \ldots \geq m_s$.
  - Flere restriksjoner her.

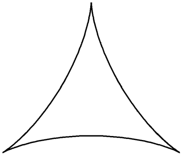
Spesielle kurver

- Vi kaller en kurve av grad d rasjonal $\iff$

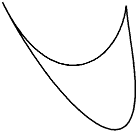
$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} = \sum_{\text{singulære punkter}} \left(\sum_i \frac{m_i(m_i-1)}{2}\right).$$

- Vi kaller en kurve cuspidal hvis alle dens singulære punkter er cusper.
- Hvor mange og hva slags cusper kan en rasjonal cuspidal kurve ha?
- Ved formelen er den cuspidale kubikken den eneste rasjonale cuspidale kurven av grad 3.

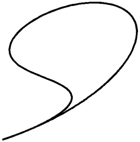
Rasjonale cuspidale kurver av grad 4



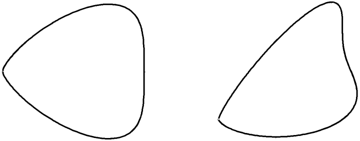
$(2), (2), (2)$



$(2_2), (2)$



(2_3)



(3)

Rasjonale cuspidale kurver av grad 5

# Cusper	Kurve	Cusptype	# Kurver
1	C_1	(4)	3 – ABC
	C_2	(2_6)	1
2	C_3	$(3,2),(2_2)$	2 – AB
	C_4	$(3),(2_3)$	1
	C_5	$(2_4),(2_2)$	1
3	C_6	$(3),(2_2),(2)$	1
	C_7	$(2_2),(2_2),(2_2)$	1
4	C_8	$(2_3),(2),(2),(2)$	1

Tricuspidale kurver

[Fenske, Flenner & Zaidenberg (1996-1999)]

Serie	d	$\overline{m}_p$	$\overline{m}_q$	$\overline{m}_r$	**For** d
I	d	$(d-2)$	(2_a)	(2_{d-2-a})	$d \geq 4$
II	$2a+3$	$(d-3, 2_a)$	(3_a)	(2)	$d \geq 5$
III	$3a+4$	$(d-4, 3_a)$	$(4_a, 2_2)$	(2)	$d \geq 7$

Formodning [Piontkowski (2007)]

- Det finnes bare en rasjonal cuspidal plan kurve med mer enn tre cusper – 5.gradskurven med cusper med multiplisitetssekvenser $[(2_3), (2), (2), (2)]$.
- De eneste tricuspidale kurvene er gitt i tabellene over.

Resultat [Tono (2005)]

- En rasjonal cuspidal kurve har ≤ 8 cusper.

Les mer i

T. Fenske
Rational cuspidal plane curves of type $(d, d-4)$ *with* $\chi(\Theta_V\langle D\rangle) \leq 0$.

H. Flenner, M. Zaidenberg
On a class of rational cuspidal plane curves.

H. Flenner, M. Zaidenberg
Rational cuspidal plane curves of type $(d, d-3)$.

R. Hartshorne
Algebraic Geometry.

G. Fischer.
Plane Algebraic Curves.

J. Piontkowski.
On the Number of the Cusps of Rational Cuspidal Plane Curves.

Velkommen til algebraisk geometri!