Løsninger til Mat 2310, Optimal kontrollteori (Torsdag 4.6-2009).

Oppgave 1.
(**a**) Differensiallikningen

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$$

har karakteriatisk likning $r^2 - 2r - 3 = 0$, så $r = -1$ eller $r = 3$. Generell løsning er da

$$x(t) = Ae^{3t} + Be^{-t},$$

der A og B er vilkårlige konstanter.
(**b**) Vi finner en partikulær løsning av

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = \cos t$$

på formen

$$u(t) = C\cos t + D\sin t$$

Vi har

$$\begin{aligned}
&-3u - 2\dot{u} + \ddot{u} \\
&= -3(C\cos t + D\sin t) - 2(-C\sin t + D\cos t) \\
&\quad + (-C\cos t - D\sin t) \\
&= (-4C - 2D)\cos t + (2C - 4D)\sin t
\end{aligned}$$

En slik u er da løsning hvis og bare hvis $(-4C - 2D)\cos t + (2C - 4D)\sin t$ er lik differensiallikningens høyre side, $\cos t$, for alle t. Altså er

$$\begin{aligned}
4C + 2D &= -1 \\
2C - 4D &= 0,
\end{aligned}$$

dvs. $D = -1/10, C = -1/5$. Da er generell løsning av differensiallikningen gitt ved

$$x(t) = Ae^{3t} + Be^{-t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{1}{10}\sin t,$$

der A og B er vilkårlige konstanter.
(**c**)

$$F(t, x, \dot{x}) = (3x^2 + 2x\cos t + \dot{x}^2)e^{-2t}$$

Da er

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6e^{-2t} > 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} = 2e^{-2t} > 0, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}} = 0, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} - (\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \dot{x}})^2 = 12e^{-4t} > 0
\end{aligned}$$

Ved 2. derivert-testen er da F strengt konveks i $(x, \dot{x})$ for hver $t \in \mathbb{R}$.
(**d**) Minimeringsproblemet

$$\min_x \int_0^{\pi} F(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t, \quad x(0) = -\frac{1}{5},\ x(\pi) \text{ er fri},$$

der F er som i $(*)$, har Eulerlikning

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) \\
&= (6x + 2\cos t)e^{-2t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2\dot{x}e^{-2t}) \\
&= (6x + 2\cos t)e^{-2t} - 2\ddot{x}e^{-2t} + 4e^{-2t}\dot{x}
\end{aligned}$$

altså

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = \cos t.$$

Løsningen fra (b) med $x(0) = -1/5$ gir $A + B = 0$. Dessuten er $x(\pi)$ fri, så $\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)_{t=\pi} = 0$, så

$$2\dot{x}(\pi)e^{-2\pi} = 0,\ \dot{x}(\pi) = 0,\ 3Ae^{3\pi} - Be^{-\pi} - \frac{1}{10}\cos\pi = 0$$

$$A = \frac{-1}{10(3e^{3\pi} + e^{-\pi})} = -B.$$

A og B er éntydig bestemt, så vi har nøyaktig én mulig optimal x. Ved (c) er F konveks i $(x, \dot{x})$ for hver t, så denne løsningen x er virkelig optimal.

Oppgave 2. Gitt kontrollproblemet (standard)

$$(1) \quad \begin{cases} \text{maks} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[u(t) - \frac{u(t)^2}{\cos t}\right] \mathrm{d}t, \qquad \dot{x} = -u, \\ u(t) \geq 0\ (t \in [0, \frac{\pi}{6}]),\ x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

(**a**) Hamiltonfunksjonen er $H(t, x, u, p) = u - u^2/\cos t - pu = (1-p)u - u^2/\cos t$. Anta at (x^*, u^*) er et optimalt par. Ved Maksimumsprinsippet må den adjungerte funksjonen p oppfylle

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} = -\dot{p}(t),\ \text{ så } \dot{p} = 0,$$

(untatt i diskontinuitetspunktene til u^*) $p(t) = k$ =konstant (untatt i disk.punktene til u^*, og da p er kontinuerlig, må det gjelde på hele $[0, \pi/6]$).

(**b**) Ved Maksimumsprinsippet må $u = u^*(t)$ maksimere $H(t, x^*(t), u, p(t))$ for hver $t \in [0, \pi/6]$. Her er

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - p(t) - \frac{2u}{\cos t} = 0$$

hvis og bare hvis

$$u = \frac{1}{2}(1 - p(t))\cos t \Leftrightarrow u = \frac{1-k}{2}\cos t.$$

Her er H konveks i u, så dette gir maksimum hvis $u = \frac{1-k}{2}\cos t \geq 0$, dvs. hvis $k \leq 1$ (siden $\cos t > 0$ her). Hvis $k > 1$, er $\frac{\partial H}{\partial u}$ aldri null for $u \geq 0$.

For $u = (1-k)\cos t/2$ er

$$
\begin{aligned}
&H(t, x^*(t), u, p(t)) \\
&= (1-k)\frac{1-k}{2}\cos t - (\frac{1-k}{2}\cos t)^2 \frac{1}{\cos t} = (\frac{1-k}{2})^2 \cos t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Hvis $k > 1$, er

$$
\frac{\partial H}{\partial u} = 1 - k - \frac{2u}{\cos t} < -\frac{2u}{\cos t} < 0,
$$

så H avtar med voksende u og maksimeres da for $u = 0$. Nå er $H(t, x^*(t), 0, p(t)) = 0$. Derfor er

$$
u = u^*(t) = \frac{1-k}{2}\cos t, \quad \text{hvis } k \leq 1, \quad u^*(t) = 0 \qquad \text{hvis } k > 1
$$

(**c**) Vi vil bestemme konstanten k og et optimalt par (x^*, u^*). Anta først at $k \leq 1$. Da er $\dot{x}^* = -\frac{1-k}{2}\cos t$, så

$$
x^*(t) = -\frac{1-k}{2}\sin t + x^*(0) = -\frac{1-k}{2}\sin t,
$$

$$
x^*(\pi/6) = -\frac{1-k}{2}\frac{1}{2} = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2},
$$

så

$$
(*) \quad x^*(t) = -\frac{1}{4}\sin t, \; u^*(t) = \frac{1}{4}\cos t.
$$

Det gir

$$
\int_0^{\pi/6} [u - \frac{u^2}{\cos t}]\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/6} [\frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{16}\cos t]\, \mathrm{d}t = \frac{3}{32}
$$

$k > 1$ ga $u^* = 0$, så integralet er lik null, men dette tilfellet gir også at x^* er konstant som er uforenlig med de to endepunktsbetingelsene. Her er H konkav i (x, u) ved 2. deriverttesten, så (x^*, u^*) gitt i $(*)$ er et optimalt par ved Mangasarians Setning.

(**d**) Vi endrer endepunktsbetingelsene i (1) til $x(0) = 0$ og $x(\frac{\pi}{6}) \geq -\frac{1}{8}$. Ved Maksimumsprinsippet, gjelder da transversalitetsbetingelsen

$$
p(t) \geq 0 \quad [p(t) = 0 \text{ hvis } x(\pi/6) > -1/8].
$$

Utregningene blir først som ovenfor, så $p(t) = k$, der nå $k \geq 0$ ($k = 0$ hvis $x^*(\pi/6) > -1/8$). Videre blir formlene for u^* og x^* som i (b) og (c), så $x^*(t) = \frac{k-1}{2}\sin t$ hvis $0 \leq k \leq 1$. Her er $x^*(\pi/6) = (k-1)/4$. Vi har følgende tre mulige tilfelle:

(**i**) $x^*(\pi/6) > -1/8 \Rightarrow k = p(\pi/6) = 0$, som gir $x^*(t) = -\frac{1}{2}\sin t$, $u^*(t) = \frac{1}{2}\cos t$. Isåfall blir integralet lik $1/8$. Dette er ingen løsning siden $x^*(\pi/6) = (k-1)/4 > -1/8 \Rightarrow k > 1/2$ som motsier at $k = 0$.

(**ii**) $x^*(\pi/6) = -1/8 \Rightarrow k = 1/2$. Vi så i ($c$) at dette gir $3/32$ som verdi av integralet.

(**iii**) $k > 1$ gir $u^* = 0$, så integralet blir null. Vi ser forøvrig at dette gir x^* konstant som er forenlig med endepunksbetingelsene her.

Tilfellet (**ii**) gir altså maksimalt integral og løser derfor maksimeringsproblemet.